KYBERNETIKA ČÍSLO 3, ROČNÍK 3/1967

Metóda dynamického programovania v dynamickej optimalizácii sústav s minimálnou dobou riadenia

JÁN ULIČNÝ

Autor v článku uvádza algoritmus odvodený na základe metódy dynamického programovania pre realizáciu výpočtu optimálnej funkcie riadenia na samočinnom číslicovom počítacom stroji u sústav s minimálnou dobou riadenia. Na konkrétnej sústave riadenia poukazuje sa možnosť použitia tzv. postupnej minimalizácie vo funkcionálnych rovniciach metódy dynamického programovania.

1. ÚVOD

Ak v procese realizácie optimálneho riadenia uvažujeme aj čas ako nezávisle premennú a procesy prebiehajúce v riadenej sústave optimalizujeme v každom časovom okamžiku, hovoríme o dynamickej optimalizácii výrobného procesu. Pojem optimalizácie v riadení znamená v podstate variačný problém spočívajúci v nájdení extrému určitého funkcionálu popisujúceho účel riadenia. Tomuto funkcionálu z hľadiska optimalizácie zvykneme hovoriť kritérium optimálnosti riadeného procesu, alebo riadenej sústavy. V mnohých dôležitých prípadoch teórie optimálnych riadených procesov nevystačíme s klasickými metodami variačného počtu. V prípade, že dovolená oblasť riadenia, tj. oblasť v ktorej sa môže funkcia riadenia nachádzať je uzatvorenou oblasťou, alebo ak naviac funkcia riadenia optimalizujúca procesy v riadenej sústave je nespojitou funkciou času, musíme v teórii optimálnych riadených procesov použiť niektorú z metód neklasického variačného počtu. V tomto článku sa budeme zaoberať jednou z takýchto metód tj. metódou dynamického programovania. Túto metódu budeme skúmať z hľadiska použitia v optimalizácii sústav s minimálnou dobou riadenia, tj. sústav, ktoré potrebujú k prechodu z jedného svojho stavu do druhého minimálnej doby.

2. IMPLICITNE VYJADRENÉ KRITÉRIUM OPTIMÁLNOSTI V METÓDE DYNAMICKÉHO PROGRAMOVANIA

Uvažujme len také sústavy riadenia v ktorých zmeny stavu v nejaký časový okamžik závisia len od stavu v ktorom sa sústava riadenia nachádza a nezávisia od jej predchádzajúcich stavov. Potom sústavu riadenia môžeme popísať s pomocou systému (obecne nelineárnych) diferenciálnych rovníc vo vektorovom tvare

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0), \tag{1}$$

kde $\mathbf{x}$ je n-rozmerný vektor popisujúci stav sústavy v n-rozmernom priestore X_n a $\mathbf{u}$ je r-rozmerný vektor riadenia. Kritérium optimálnosti riadenej sústavy (1) môžeme matematický vyjadriť rovnicou

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^T G[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]\, dt. \tag{2}$$

Potom úlohu optimalizácie riadeného procesu v sústave (1) môžeme sformulovať nasledovne:

Spomedzi všetkých prípustných riadení z dovolenej oblasti $L(\mathbf{u})$ tj.

$$\mathbf{u} \in L(\mathbf{u}) \tag{3}$$

treba nájsť takú funkciu riadenia $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, ktorá by nám zastupujúci bod po fázovej trajektórii riadenej sústavy (1) v priestore X_n prevádzala z počiatočnej polohy sústavy $\mathbf{x}(0)$ do polohy $\mathbf{x}(T)$ a aby funkcionál (2) nadobúdal najmenších možných hodnôt [3]. V prípade, že doba $t = T$ v hornej medzi funkcionálu (2) nie je predom určená a naviac ak podintegrálna funkcia $G[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$ sa rovná identický jedničke na celom intervale $0 \leqq t \leqq T$ hovoríme, že ide o implicitne vyjadrené kritérium optimálnosti v metóde dynamického programovania. Ak žiadame za tohoto predpokladu, aby funkcionál (2) nabodúbal najmenších možných hodnôt na intervale $0 \leqq t \leqq T$ pri podmienke (3), hovoríme v súvislosti s rovnicou (1) o sústavách s minimálnou dobou riadenia. Potom predošlá úloha optimalizácie riadeného procesu znie:

Nájsť spomedzi všetkých prípustných riadení z dovolenej oblasti (3) takú funkciu riadenia, ktorá by nám zastupujúci bod po fázovej trajektórii riadenej sústavy (1) v priestore X_n previedla z počiatočného stavu sústavy $\mathbf{x}(0)$ do stavu konečného $\mathbf{x}(T)$ za najkratšiu možnú dobu $t = t^*$.

Bez toho aby sme úlohu obmedzili na všeobecnosti, môžeme uvažovať, že konečný stav sústavy je v počiatku súradnicového systému priestoru X_n tj. $\mathbf{x}(T) \equiv 0$.

3. FUNCIONÁLNE ROVNICE METÓDY DYNAMICKÉHO PROGRAMOVANIA

Preveďme si spojitý model sústavy riadenia na diskrétny a uvažujme miesto diferenciálnej rovnice (1) diferenčnú rovnicu

$$\mathbf{x}_{N+1} = \mathbf{x}_N + \Delta\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N)\,, \quad N = 0, 1, 2, \ldots, M - 1\,, \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)\,, \tag{4}$$

kde

$$\Delta = t^*/M\,, \tag{5}$$

pričom

$$t^* = \min_{\mathbf{u} \in L(\mathbf{u})} Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u} \in L(\mathbf{u})} T[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(t)] = t^*(\mathbf{x}(0))\Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} \tag{6}$$

čo vyplýva z rovnice (2). Minimálna doba prechodu sústavy z počiatočného stavu $\mathbf{x}(0)$ do počiatku súradnicového systému priestoru X_n je závislá jedine na počiatočnom stave sústavy tj. na polohe bodu $\mathbf{x}(0)$ v priestre X_n ak bereme do úvahy, že na sústavu riadenia pôsobí optimálna funkcia riadenia $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ z dovolenej oblasti (3).

Pre jednoduchosť uvažujme, že dovolená oblasť riadenia (3) má tvar

$$|u_i| \leqq 1\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{7}$$

Výraz (7) nám predstavuje kocku v r-rozmernom priestore riadenia. Všimnime si, že dovolená oblasť riadenia (7) je uzatvorenou oblasťou tzn., že funkcia riadenia sa môže nachádzať nie len vo vnútri tejto oblasti, ale aj na jej hranici (v tomto prípade na niektorej z jej hrán). Už z tohoto jednoduchého prípadu dovolenej oblasti (7) vidíme, že extremála $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ nemôže prechádzať do oblasti „nasýtenia", tj. mimo oblasť (7) čo vylučuje možnosti použitia klasického variačného počtu. Na základe princípu optimálnosti [1] môžeme zostaviť pre sústavu riadenia popísanú systémom (1), alebo (4) funkcionálnu rovnicu tvaru

$$F[\mathbf{x}] = 1 + \min_{|u_i| \leqq 1} F[\mathbf{x} + \Delta\, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})]\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,, \tag{8}$$

kde funkcia $F[\mathbf{x}]$ nám určuje minimálny počet stavov, cez ktorý musí sústava riadenia popísaná systémom (4) prejsť z počiatočného stavu $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ do stavu konečného $\mathbf{x}_M = \mathbf{x}(T) = 0$, tj. do počiatku súradnicového systému priestoru X_n. Rovnicu (8) zatiaľ nevieme riešiť v uzatvorenom tvare. Aby sme mohli zistiť minimálny počet stavov $F[\mathbf{x}]$ potrebný k prechodu sústavy z polohy počiatočnej do polohy konečnej a tým aj optimálnu funkciu riadenia $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ zameňme si našu pôvodnú úlohu optimalizácie na úlohu nasledujúceho znenia:

Žiadajme, aby optimálna funkcia riadenia z dovolenej oblasti (7) minimalizovala na konci procesu riadenia kvadrát vzdialenosti zastupujúceho bodu na fázovej trajektórii riadenej sústavy od počiatku súradnicového systému priestoru X_n.

Potom funkcionálne rovnice zostavené na základe princípu optimálnosti a sformulovanej úlohy dávajúce rekurentný vzťah pre určenie minimálneho počtu stavov prechodu sústavy riadenia do počiatku súradnicového systému majú tvar

$$D_0[\mathbf{x}] \min_{|u_i| \leqq 1} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 , \quad (i = 1, 2, \ldots, r) , \tag{9}$$

kde n je rád riadenej sústavy, a

$$D_N[\mathbf{x}] = \min_{|u_i| \leqq 1} D_{N-1}[\mathbf{x} + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})] , \quad (i = 1, 2, \ldots, r ; \quad N = 1, 2, \ldots, M) . \tag{10}$$

Výpočet optimálnej funkcie riadenia prevádzajúcej zastupujúci bod do počiatku súradnicového systému priestoru X_n s pomocou metódy dynamického programovania sa prevádza v dvoch častiach [1], [5]. Vprvej časti prevádzame výpočet postupnosti funkcií $D_N[\mathbf{x}]$, $N = 0, 1, 2, \ldots, M$ do tej doby až pre niektoré $N = M$ nenadobudne funkcia $D_N[\mathbf{x}(0)]$ nulovej hodnoty, alebo hodnoty z praktického hľadiska veľmi malej napr.

$$D_M[\mathbf{x}(0)] \leqq \varepsilon , \tag{11}$$

kde ε je malá kladná konštanta. Potom $M[\mathbf{x}(0)]$ udávajúce celkový počet etáp N po uplynutí ktorých nadobúda platnosť výraz (11) nám určuje minimálny počet stavov prechodu riadenej sústavy do počiatku súradnicového systému priestoru X_n. Z rovnice (5) platí potom, že minimálna doba prechodu je rovná

$$t^*(\mathbf{x}(0)) = \Delta\, M[\mathbf{x}(0)] , \tag{12}$$

kde Δ je parameter z rovnice (4), ktorý volíme z hľadiska presnosti, ktorú požadujeme od výsledkov [1].

V druhej časti výpočtu prevádzame výpočet optimálnej trajektórie riadenej sústavy a zároveň počítame výslednú optimálnu funkciu riadenia z dielčích optimálnych funkcií riadenia, ktoré sme dostali na jednotlivých etapách pri výpočte postupnosti funkcií $D_N[\mathbf{x}]$ pre konkrétnu hodnotu vektoru $\mathbf{x}$ [2], [5].

4. RIEŠENIE FUNKCIONÁLNYCH ROVNÍC (9), (10) METÓDOU PRIAMEJ MINIMALIZÁCIE FUNKCIE $D_N[\mathbf{x}]$

Riešenie funkcionálnych rovníc (9), (10) obyčajne prevádzame metódou priamej minimalizácie funkcie $D_N[\mathbf{x}]$, $N = 0, 1, 2, \ldots, M$ spočívajúcej na nasledovnom princípe [2]:

Predpokladajme, že sústava riadenia je n-tého rádu a premenné popisujúce stav sústavy v priestore X_n tj. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nech sú z určitej predom vydelenej oblasti, ktorá nás pri výpočte najviac zaujíma. Napr. nech premenné $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sú z oblasti určenej výrazom

$$a_j \leqq x_j \leqq b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{13}$$

Ďeľme interval každej premennej x_j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ na $(m - 1)$ podintervalov, kde m je číslo volené z hľadiska presnosti výpočtu. Potom z deliacich bodov intervalov (13) každej premennej môžeme vytvoriť celkom

$$K_1 = m^n \tag{14}$$

n-tíc určených bodmi n-rozmernej siete zostrojenej z premenných x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Nech tieto n-tice tvoria usporiadanú množinu $\{K_1\}$. V každej jednotlivej n-tici z množiny $\{K_1\}$ počítame na každej etape $N = 0, 1, 2, \ldots, M$ funkciu $D_N[\mathbf{x}]$, v ktorej za argument $\mathbf{x}$ dosadíme práve zvolenú n-ticu. Minimalizáciu funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ (teraz už ako premennej $\mathbf{u} \in L(\mathbf{u})$) prevádzame nasledovným spôsobom:

Ďeľme zložky funkcie riadenia z intervalov

$$-1 \leqq u_i \leqq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{15}$$

tiež na $(m - 1)$ podintervalov a vytvorme z premenných u_i, $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sieť v r-rozmernom priestore riadenia. Celkový počet n-tíc vytvorených bodmi tejto siete bude

$$K_2 = m^r\,. \tag{16}$$

Nech tieto n-tice tvoria určitú usporiadanú množinu $\{K_2\}$. Zvoľme si na určitej etape N jednu n-ticu z množiny $\{K_1\}$ a dosaďme ju ako argument za $\mathbf{x}$ do funkcie D_{N-1} rovnice (10). Za premennú $\mathbf{u}$ v tejto funkcii dosadzujme postupne všetky n-tice z množiny $\{K_2\}$ v určitom zvolenom poradí pričom funkciu D_{N-1} porovnávame za každým s funkciou, v ktorej bola dosadená predchádzajúca n-tica z množiny $\{K_2\}$. Tá najmenšia hodnota D_{N-1} sa rovná hodnote funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ pri zvolenej n-tici z množiny $\{K_1\}$. Potom funkcia $D_N[\mathbf{x}]$ je absolútnym minimom pre zvolený argument $\mathbf{x}$ pri funkcii riadenia $\mathbf{u} = \mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ z dovolenej oblasti riadenia (7). Funkcie $\mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ sú dielčími optimálnými funkciami riadenia na prvej časti výpočtu pre ten, ktorý argument $\mathbf{x}$ (n-ticu z množiny $\{K_1\}$). Podobným postupom výpočtu, ktorý sme opísali vypočítame funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ a $\mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ pre každú n-ticu z množiny $\{K_1\}$ a pre každú etapu $N = 0, 1, 2, \ldots, M$ podľa rekurentných vzťahov (9), (10), [2], [5]. Opísanou metódou priameho vyhľadávania minima funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ sme chceli poukázať na to, aké množstvo výpočtov treba previesť pri realizácii výpočtu funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ a funkcie $\mathbf{u}_N[\mathbf{x}]$ na prvej časti výpočtu. Vidíme, že pri vyhľadávaní minima funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ (pri jednej n-tici z množiny $\{K_1\}$) prevádzame na samočinnom číslicovom počítači K_2 zložitých výpočtov a porovnaní (dosadenie n-tice z množiny $\{K_1\}$ za argument $\mathbf{x}$ do funkcie D_{N-1}; výpočet funkcie D_{N-1} za pomoci interpolácie, alebo extrapolácie zo známych hodnôt D_{N-1}; zapamätanie vypočítaných hodnôt). Keď tento počet výpočtov násobíme počtom n-tíc z množiny $\{K_1\}$ a číslom etáp ($N = M$) dostávame celkové číslo složitých výpočtov, ktoré je nutné previesť na prvej časti výpočtu metódou dynamického programovania tj.

$$R = K_1 K_2 M = M m^n m^r = M m^{n+r} . \tag{17}$$

V prípade, že $n = r$, čo odpovedá sústave n-tého rádu s n-rozmerným vektorom riadenia dostávame

$$R = M m^{2n} . \tag{18}$$

Pre sústavy riadenia vyšších rádov za dnešného stavu číslicovej techniky je výpočet metódou dynamického programovania opísaným spôsobom priameho vyhľadávania minima funkcie $D_N[\mathbf{x}]$, ako je to vidieť z rovnice (18), naprosto nemysliteľný. Treba poznamenať, že samotný výpočet funkcionálnych rovníc (9), (10) kladie veľké nároky na objem pamäti počítača. Na každej etape máme zapamätané hodnoty funkcií $D_N[\mathbf{x}]$ a $D_{N-1}[\mathbf{x}]$ a funkcie $\mathbf{u}_\varrho(\mathbf{x})$, ($\varrho = 0, 1, \ldots, N$). Potom na etape $N = M$ máme v pamäti počítača hodnoty funkcií $D_M[\mathbf{x}]$, $D_{M-1}[\mathbf{x}]$ a všetky hodnoty $\mathbf{u}_N(\mathbf{x})$, ($N = 0, 1, 2, \ldots, M$). (Funkcie $\mathbf{u}_N(\mathbf{x})$ sú potrebné pre výpočet optimálnej trajektórie a výslednej optimálnej funkcie riadenia na druhej časti výpočtu.) Objem pamäti počítača nutný k prevedeniu výpočtu je potom daný výrazom

$$O = 2m^n + Mrm^n . \tag{19}$$

Za predpokladu, že $n = r$ platí

$$O = (2 + nM)\, m^n . \tag{20}$$

Z výrazu (20) vyplýva, že realizácia výpočtu na samočinnom číslicovom počítači nemôže byť uskutočnená pri sústavách vyšších rádov ani nie tak z dôvodov dĺžky doby výpočtu, ale hlavne z tých príčin, že nám nevystačí objem pamäti počítača.

Druhá časť výpočtu v metóde dynamického programovania nekladie veľké nároky na dĺžku doby realizácie výpočtu na samočinnom počítači. V porovnaní s dĺžkou doby realizácie výpočtu na prvej časti je úplne zanedbateľná a trvá rádove sekundy.

5. RIEŠENIE FUNKCIONÁLNYCH ROVNÍC (9), (10) METÓDOU POSTUPNEJ MINIMALIZÁCIE FUNKCIE $D_N[\mathbf{x}]$

Dobu realizácie výpočtu funkcií $D_N[\mathbf{x}]$, ($N = 0, 1, 2, \ldots, M$) na prvej časti je možné za určitých okolností skrátiť. Predpokladajme, že funkcia $D_N[\mathbf{x}]$, ($N = 0, 1, 2, \ldots, M$), ktorú na každej etape riadeného procesu minimalizujeme vzhľadom na premennú $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ z dovolenej oblasti (7) je v tejto oblasti spojitou funkciou premennej $\boldsymbol{u}$ a naviac, že v tejto uzatvorenej oblasti, má každá funkcia $D_N[\mathbf{x}]$, $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ jediné minimum. Potom namiesto priamej metódy vyhľadávania minima funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ môžeme použiť napr. gradientnej iteračnej metódy výpočtu optimálnej funkcie riadenia, ktorá po dosadení do rovníc (9), (10) minimalizuje funkciu $D_N[\mathbf{x}]$. Tento postup výpočtu minima funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ v metóde dynamického programovania (z hľadiska postupu pri výpočte) budeme nazývať metódou postupnej minimalizácie funkcie $D_N[\mathbf{x}]$. Prípady, kedy môžeme voliť miesto priamej metódy metódu postupnej minimalizácie funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ je nutné skúmať zvlášť v každom konkrétnom prípade úloh teórie optimálnych riadených procesov. Aby sme túto metódu lepšie vysvetlili a poukázali na jej prednosti v metóde dynamického programovania budeme uvažovať konkrétnu lineárnu sústavu s minimálnou dobou riadenia popísanú systémom rovníc

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2 + b_{11}u_1 ,$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -2x_1 - 3x_2 + b_{22}u_2 , \tag{21}$$

kde $b_{11} = 0{,}1$; $b_{22} = -0{,}2$. Počiatočné podmienky systému (21) nech sú $x_1(0) = x_2(0) = 0{,}3$.

Rovnica (10) nadobúda tvar

$$D_N[x_1, x_2] = \min_{\substack{|u_1| \leqq 1 \\ |u_2| \leqq 1}} D_{N-1}[H_1(x_1, x_2) + 0{,}01u_1(x_1, x_2), H_2(x_1, x_2) - 0{,}02u_2(x_1, x_2)] , \quad N = 1, 2, \ldots, M , \tag{22}$$

kde

$$H_1(x_1, x_2) = x_1 + 0{,}1x_2 , \tag{23a}$$

$$H_2(x_1, x_2) = 0{,}7x_2 - 0{,}2x_1 , \tag{23b}$$

za predpokladu, že Δ z rovnice (12) sa rovná $\Delta = 0{,}1$.

V práci [5] je dokázané, že funkcia $D_N[\mathbf{x}]$ na každej etape mnohoetapového procesu riadenia $N = 0, 1, 2, \ldots, M$, je spojitou funkciou parametru $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ pre každú hodnotu $\mathbf{x}$ z oblasti (13) a naviac, že každá funkcia $D_N[\mathbf{x}]$, $(N = 0, 1, 2, \ldots, M)$ má na uzatvorenej oblasti (7) jediné minimum. Na základe tejto skutočnosti môžeme v rovnici (22) použiť metódy postupnej minimalizácie, ktorú v krátkosti opíšeme [5].

Pre pevnú dvojicu čísel (x_1, x_2) z usporiadanej množiny $\{K_1\}$ obecne na N-tej etape riadeného procesu zistíme v nejakom počiatočnom bode funkcie $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ (označme si zložky tejto funkcie riadenia v nultom bode ako $u_1^{(0)}(x_1, x_2)$, $u_2^{(0)}(x_1, x_2)$)

hodnotu funkcie $D_{N-1}[x_1, x_2]$. Pretože funkcia D_{N-1} je vzhľadom na (x_1, x_2) konštantná, budeme jej závislosť od premennej $\boldsymbol{u}$ písať nasledovne

$$D_{N-1}^{(0)} = D_{N-1}^{(0)}[u_1^{(0)}(x_1, x_2), u_2^{(0)}(x_1, x_2)], \tag{24}$$

kde $D_{N-1}^{(0)}$ znamená nulté priblíženie k minimu funkcie $D_N[x_1, x_2]$. Na nultej iterácii $D_{N-1}^{(0)}$ si určíme gradient funkce D_{N-1} a po zvolení kroku λ, kde λ je dostatočne malé kladné číslo poopravíme v argumente funkcie $D_{N-1}^{(0)}$ hodnotu $\boldsymbol{u}^{(0)}$ na hodnotu $\boldsymbol{u}^{(1)}$. Po vypočítaní funkcie D_{N-1} v bode $\boldsymbol{u}^{(1)}$ dostávame ďalšiu hodnotu $D_{N-1}^{(1)}$. Takýmto spôsobom by sme postupovali až do vtedy, kým by funkcia D_{N-1} nenadobudla pre zvolenú dvojicu (x_1, x_2) minimálnych hodnôt. Táto minimálna hodnota D_{N-1} sa potom rovná funkcii $D_N[x_1, x_2]$ z rovnice (22). Samozrejme, keď hovoríme o „výpočte" funkcie D_{N-1} v argumente $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ treba pod tým rozumieť určovanie hodnoty D_{N-1} za pomoci interpolácie, alebo extrapolácie z hodnôt funkcie $D_{N-2}[x_1, x_2]$ uschovaných v pamäti na predchádzejúcej etape.

Zložky gradientu funkcie D_{N-1} obecne na J-tom iteračnom kroku funkcie D_{N-1} určujeme zo vzťahu

$$G_{N-1}^{(Ju_i)} = \frac{\partial D_{N-1}^{(Ju_i)}[u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)]}{\partial u_i(x_1, x_2)} \doteq \frac{\Delta D_{N-1}^{(Ju_i)}}{\Delta u_i}; \quad (i = 1, 2), \tag{25}$$

kde

$$\Delta D_{N-1}^{(Ju_i)} = D_{N-1}^{(Ju_i)} - D_{N-1}^{(J)} \quad (i = 1, 2) \tag{26}$$

je prírastkom funkcie D_{N-1} pri pevnej dvojici (x_1, x_2) na J-tom kroku. Pre funkciu $D_{N-1}^{(Ju_i)}$, $(i = 1, 2)$ platí

$$D_{N-1}^{(Ju_1)} = D_{N-1}^{(Ju_1)}(u_1^{(J)} + \Delta u_1, u_2^{(J)}), \tag{27a}$$

$$D_{N-1}^{(Ju_2)} = D_{N-1}^{(Ju_2)}(u_1^{(J)}, u_2^{(J)} + \Delta u_2). \tag{27b}$$

Hodnota funkcie $D_{N-1}^{(J)}$ je určená výrazom

$$D_{N-1}^{(J)} = D_{N-1}^{(J)}(u_1^{(J)}(x_1, x_2), u_2^{(J)}(x_1, x_2)). \tag{28}$$

Funkciu riadenia na prvej časti výpočtu potom určujeme ako postupnosť funkcií podľa vzťahu

$$u_{i,N-1}^{(J+1)} = u_{i,N-1}^{(J)} - \lambda \,.\, G_{N-1}^{(Ju_i)}, \quad (i = 1, 2;\ J = 0, 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

Z výrazu (29) vidíme, že pri zvolenej n-tici (x_1, x_2) z usporiadanej množiny $\{K_1\}$ nemusíme pri minimalizácii funkcie $D_{N-1}[x_1, x_2]$ kontrólovať a počítať túto funkciu pre každú n-ticu (u_1, u_2) z usporiadanej množiny $\{K_2\}$, ale stačí túto funkciu počítať len v n-ticiach (u_1, u_2), ktoré sú v procese minimalizácie určované rovnicou (29). Týmto sa získa veľká úspora času pri realizácii výpočtu funkcií $D_N[\boldsymbol{x}]$ na samočinnom číslicovom počítacom stroji. Je dôležité pripomenúť, že rovnice (25) až (28) sa počítajú tak, že za pomoci interpolácie a extrapolácie určujeme v nich funkcie D_{N-1} z hodnôt, ktoré boli na základe funkcionálnych rovníc (9), (10) vypočítané a uložené na predchádzajúcej etape v pamäti počítača. Podrobnejší popis výpočtu a voľby kroku λ ako aj počiatočných podmienok $u_i^{(0)}$ na každej etape $N = 0, 1, 2, \ldots, M$ a pre každú novú n-ticu z množiny $\{K_1\}$ je uvedený v práci [5].

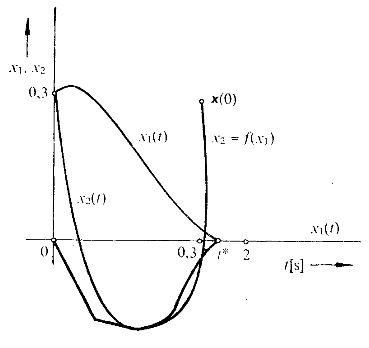
Uvedeným spôsobom na prvej časti výpočtu metódou dynamického programovania dostávame ako výsledok funkcie

$$u_{i,N}(x_1, x_2)\,, \quad (i = 1, 2;\; N = 0, 1, 2, \ldots, M)\,. \tag{30}$$

Je to tá funkcia, ktorú sme dostali z rovnice (29) a ktorá dáva pravej strane rovnice (22) minimálnu hodnotu na N-tej etape pri zvolenej dvojici (x_1, x_2).

V druhej časti výpočtu metódou dynamického programovania určujeme optimálnu fázovu trajektóriu riadenej sústavy (lepšie povedané len jej diskrétne hodnoty) a výslednú optimálnu funkciu riadenia z hodnôt funkcie riadenia (30), ktorá bola získaná na prvej časti výpočtu. Výsledná optimálna funkcia riadenia sa určuje (spätným postupom vzhľadom na poradie etáp v prvej časti výpočtu [4]) zo vzťahu

$$U_{i,n}(x_{1,n}, x_{2,n}) = u_{i,M-n}(x_{1,n}, x_{2,n})\,, \quad (i = 1, 2;\; n = 0, 1, \ldots, M-1)\,. \tag{31}$$



Obr. 1. Optimálna fázová trajektória a časové priebehy riadenej sústavy (21).

Potom optimálna trajektória určená za pomoci rovnice (31) a počiatočných podmienok

$$x_{1,0} = x_{2,0} = 0{,}3 \tag{32}$$

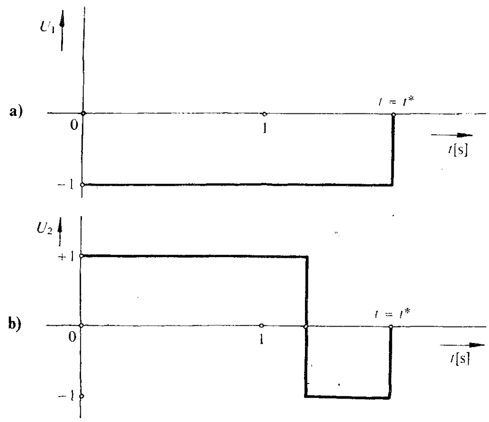
bude daná výrazom

$$x_{1,n+1} = H_1(x_{1,n}, x_{2,n}) + 0{,}01\,U_{1,n}(x_{1,n}, x_{2,n})\,, \quad (n = 0, 1, \ldots, M-1)\,, \tag{33a}$$

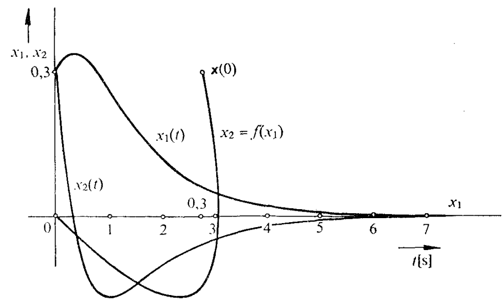
$$\text{(33b)} \quad x_{2,n+1} = H_2(x_{1,n}, x_{2,n}) - 0{,}02U_{2,n}(x_{1,n}, x_{2,n}), \quad (n = 0, 1, \dots, M - 1),$$

kde funkcie H_1 a H_2 sú určené vzťahmi (23) pre tú ktorú dvojicu $(x_{1,n}, x_{2,n})$.

Rovnicou (31) je určená optimálna funkcia riadenia, ktorá prevádza sústavu riadenia (21) (alebo presnejšie povedané – jej diskrétny model daný rovnicami (33))



Obr. 2. Zložky optimálnej funkcie riadenia riadenej sústavy (21).



Obr. 3. Fázová trajektória a časové priebehy neriadenej sústavy (21).

z počiatočného stavu (32) cez minimálny počet stavov do počiatku súradnicového systému priestoru X_n za najkratšiu možnú dobu t^* určenú rovnicou (12). Optimálna fázová trajektória $x_2 = f(x_1)$ a časové priebehy veličín $x_1 = x_1(t)$ a $x_2 = x_2(t)$, ktoré dostaneme z rovníc (33) sú znázornené na obr. 1.

Zložky optimálnej funkcie riadenia dané rovnicou (31) po rozvinutí v čase tj. $U_i = U_i(t)$ sú znázornené na obr. 2. Z obr. 2 vidíme, že zložky optimálnej funkcie riadenia sa nachádzajú v každom časovom okamžiku z intervalu $0 \leqq t \leqq t^*$ na hranici dovolenej oblasti riadenia (7).

Pre porovnanie je na obr. 3 vynesená fázová trajektória neriadenej sústavy (21) a časové pribehy veličín $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$. (Pri neriadenej sústave sú koeficienty $b_{11} = b_{22} = 0$.) Doba, za ktorú procesy v neriadenej sústave konvergujú k nule, je rovná $t = 7$ sec. Minimálna doba riadenia v riadenej sústave je $t^* \doteq 1{,}64$ sec.

6. ZÁVER

Doposiaľ nebola nájdená univerzálna metóda na riešenie úloh teórie optimálnych riadených procesov, ktorá by v každom konkrétnom prípade dávala z praktického hľadiska reálne východisko. Algoritmus, ktorý nám dáva metóda dynamického programovania pre realizáciu výpočtu optimálnej funkcie riadenia na samočinnom číslicovom počítacom stroji platí aj pre nelineárne sústavy s minimálnou dobou riadenia. Treba poznamenať, že je to jediná doposiaľ známa metóda, ktorá dáva výpočtový algoritmus pre číslicový počítač v prípade nelineárnych sústav s minimálnou dobou riadenia. Výhoda použitia postupnej minimalizácie funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ oproti priamej minimalizácii funkcionálnych rovníc (9), (10) sa javí v podstatnom znížení dĺžky doby realizácie výpočtu na samočinnom číslicovom počítacom stroji. V ďaľšom článku dokážeme, že v prípade lineárnych sústav s minimálnou dobou riadenia stačí počítať funkcie $D_N[\mathbf{x}]$ len na polovici celej množiny $\{K_1\}$ čím sa samozrejme ušetrí polovica potrebného objemu počítača pre výpočet a dĺžka doby realizácie výpočtu sa skráti na polovicu.

(Došlo dňa 27. júna 1966.)

LITERATURA

[1] Bellman R.: Dinamičeskoe programirovanie, Moskva, 1960.

[2] Bellman R.: Adaptive Control Processes: A Guided Tour, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1961.

[3] Фельдбаум А. А.: Основы теории оптимальных автоматических систем. Москва 1963.

[4] Roberts S. M.: Dynamic Programming in Chemical Engineering and Process Control. London 1964.

[5] Uličný J.: Niektoré otázky dynamickej optimalizácie spojitých sústav. Kandidátska dizertačná práca, Bratislava 1965.

Dynamic Programming Method in the Dynamic Optimization of Systems with Minimum Control Time

JÁN ULIČNÝ

The dynamic programming method essentially exploiting the optimality principle formulated by Bellman, may be applied in the dynamic optimization of systems with minimum control time. In addition to the advantages offered by this method it is essential to note that systems of higher orders are either unsolvable by this method using up-to-date digital techniques or the computation on the digital computer involves an uneconomically long time. The author of the article refers to the possibility of utilizing the so called sequential minimization in functional equations of this method of dynamic programming whereby the time span for carrying out the computation of the optimal control function considerably diminues.

Ing. Ján Uličný, CSc., Ústav technickej kybernetiky SAV, Bratislava, Dúbravská cesta.