

# Aproximace funkcí v úlohách regulační techniky

JAROMÍR ŠTĚPÁN

V první části článku jsou formulovány požadavky na aproximaci funkcí v úlohách regulační techniky. Na základě těchto požadavků je diskutováno použití klasických metod aproximace. V druhé části článku je navržena metoda aproximace funkcí v prostoru  $L_2(0, \infty)$  pomocí tzv. „dominantních kořenů“.

## 1. ÚVOD

Řešení většiny úloh regulační techniky je založeno na přenosech získaných některou metodou identifikace regulovaných soustav. Těmito metodami získáme přenosy, které jsou vždy více nebo méně aproximací skutečného přenosu. V teorii regulační techniky chybí vhodná metoda aproximace, pomocí které by bylo možno hodnotit přesnost výchozích podkladů — přenosů regulovaných soustav — s ohledem na další výpočty při syntéze regulačních obvodů. Tuto mezeru dnes zaplňují práce z oboru „analýzy citlivosti“. Tyto práce ukazují zpravidla rozpor mezi výchozími podklady získanými při identifikaci a dalšími výpočty syntézy regulačních obvodů. Metody „analýzy citlivosti“ nemohou samy o sobě vysvětlit příčiny těchto rozporů. Tento úkol může splnit jen vhodná metoda aproximace funkcí, která dovolí komplexní posouzení regulačních úloh. V této práci se pokusíme stanovit takovou metodu aproximace. Jak požadavky na aproximaci tak i dále odvozenou aproximaci budeme hodnotit především z hlediska problematiky spojené s identifikací regulovaných soustav.

## 2. ZÁKLADNÍ VZTAHY

Nejdříve zavedeme některé omezující předpoklady. Budeme se zabývat pouze případy, ve kterých lze regulovanou soustavu popsat přenosem ve tvaru

$$(1) \quad F_s(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j} = \frac{M(p)}{N(p)},$$

278 kde  $m \leq n - 3$ . Přenos uzavřeného obvodu pro poruchu  $z$  na vstupu do soustavy je potom

$$(2) \quad F_z(p) = \frac{x(p)}{z(p)} = \frac{F_S(p)}{1 + F_S(p) F_R(p)} = \frac{M(p)}{N(p) + F_R(p) M(p)},$$

kde  $x$  je regulovaná veličina a  $F_R$  je přenos regulátoru.

V dalších úvahách se omezíme na ideální proporcionální regulátor s přenosem

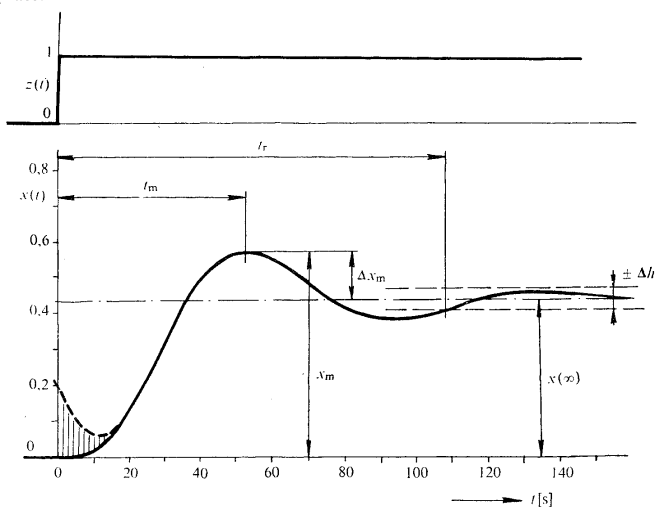
$$(3) \quad F_R(p) = r_0,$$

kde  $r_0$  je zesílení regulátoru.

Za předpokladu nulových počátečních podmínek a jednotkového skoku poruchy  $z$  je přechodová funkce

$$(4) \quad x(t) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j e^{p_j t}.$$

Funkce  $x(t)$  je originál obrazu  $F_z(p)$  ve smyslu Laplaceovy-Wagnerovy transformace. U lineárních soustav lze volit nulové počáteční podmínky, protože platí princip superposice. Jiné tvary vstupního signálu než skok budeme diskutovat v závěru práce.



Obr. 1. Charakteristické hodnoty přechodové charakteristiky.

Formulujeme požadavky na metodu aproximací funkcí vhodnou pro úlohy regulační techniky. Vyjdeme z typického tvaru funkce  $x(t)$ , jak je naznačena na obr. 1. V obr. 1 jsou vyznačeny důležité hodnoty přechodové charakteristiky, podle kterých hodnotíme regulační pochod. Jsou to: maximální odchylka ( $x_m$ ), přeregulování ( $x_m - x(\infty)$ ), časový okamžik maximální odchylky ( $t_m$ ) a doba ukončení regulačního pochodu ( $t_r$ ) (regulovaná veličina nevystoupí z daných mezí). Podle obr. 1 lze formulovat tyto požadavky na aproximaci funkcí:

a) Metoda aproximace funkcí musí zaručovat shodu původní a náhradní funkce především v oblasti charakteristických hodnot, jak byly vyznačeny v obr. 1.

b) Počátek přechodové funkce je určen vlastnostmi soustavy. Úsek kolem maximální odchylky je určen vlastnostmi soustavy i regulátoru. Shoda původní a náhradní funkce musí být proto zaručena pro co nejširší rozsah zesílení  $r_0$ , v krajním případě pro oblast zesílení  $r_0 = 0$  až  $r_0 = r_{ok}$  ( $r_{ok}$  je kritické zesílení). Jde tedy o podstatně širší úlohu aproximace než se obvykle řeší.

c) V úlohách regulační techniky pracujeme s různými tvary vstupních signálů. Metoda aproximace musí proto umožňovat jednoduché hodnocení vypočtených výsledků při změnách tvaru vstupních signálů.

d) Hledáme metodu aproximace, která zachovává typ původní funkce a tím vztah k fyzikálním základům regulačních úloh.

### 3. METODY APROXIMACE FUNKCÍ

V tomto odstavci zhodnotíme krátce možnosti použití neznámějších metod aproximace z hlediska požadavků z odstavce 2.

Formulujeme nejdříve problém aproximace funkcí [1; 2]. Mějme lineární normovaný prostor  $R$  prvků  $x, \bar{x} \dots$ . Dále máme podprostor  $V$  (konečné dimenze) prostoru  $R$ . K danému  $x \in R$  hledáme  $\bar{x} \in V$  tak, aby chyba aproximace byla minimální pro všechna  $\bar{x}$

$$(5) \quad e_V = \inf \| \bar{x} - x \| ,$$

kde  $\| \bar{x} - x \| = d(\bar{x}, x)$  je vzdálenost prvků  $x$  a  $\bar{x}$ .

Podle bodu d) v odst. 2 má být náhradní funkce  $\bar{x}(t)$  stejné třídy jako funkce  $x(t)$ . To znamená, že vylučujeme použití harmonických nebo Čebyševových aproximací.

Požadavku v bodu d) vyhovují aproximace rozvojem v mocninové řady v oblasti komplexní proměnné a na základě minima čtverce rozdílu původní a náhradní funkce (v prostoru  $L_2(0, \infty)$ , popř. na lineálu  $W_2(0, \infty)$  funkcí  $\bar{x}(t)$ ).

Výhodou aproximací rozvojem v mocninové řady je jednoduchost. V případě funkcí (4) popř. přenosů (1) nebo (2) činí obtíž odhad chyby vzhledem k použitému počtu členů. V odst. 6 ukážeme, jak lze použít jednoduchosti těchto aproximací ve spojení s aproximacemi funkcí typu (4) v prostoru  $L_2(0, \infty)$ .

Pro úlohy regulační techniky se hodí patrně nejlépe aproximace v prostoru  $L_2(0, \infty)$ . Jde nyní o to, jak splňuje tato metoda aproximace požadavky formulované v odst. 2 a jak lze odstranit nebo zmírnit některé její principiální nedostatky (složitost výpočtu, neurčitost chyby, neurčitost typu náhradní funkce). Požadavky v bodě a) a c) odst. 2 lze splnit zavedením složek tzv. „dominantních kořenů“, jak ukážeme v odst. 4 a 5. Tím se také podstatně zjednoduší výpočet náhradní funkce.

V teorii aproximací funkcí není uspokojivě řešeno určení typu náhradní funkce  $\bar{x}(t)$ . Na jedné straně plníme tak pracně vztah (5) a na druhé straně děláme někdy větší chybu nevhodnou volbou typu funkce  $\bar{x}(t)$ . Tento nedostatek se vyskytuje téměř u všech publikovaných metod aproximace. Prakticky jsme téměř vždy nuceni počítat aproximaci pro více typů náhradních funkcí  $\bar{x}(t)$  a výsledky porovnat podle vhodného kritéria. Ve spojitosti s tímto problémem budeme dále hovořit o klasifikaci funkcí. Této otázce je věnován odst. 7.

Novým problémem aproximace funkcí je požadavek uvedený v bodě b). Požadujeme, aby aproximace vyhovovala pro celá spektra funkcí  $X(t, r_0)$  a  $\bar{X}(t, r_0)$  daných pouze změnou zesílení  $r_0$ . Jednoduše lze splnit tento požadavek při aproximacích rozvojem v mocninové řadě. Pro přenos (2) lze psát mocninovou řadu v bodě  $p = 0$ .

$$(6) \quad F_x(p) = \varphi_0 + \varphi_1 p + \varphi_2 p^2 + \dots,$$

kde

$$\varphi_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dp^k} F_x(p) \right|_{p=0}.$$

Podmínky konvergence řady (6) plynou z tvaru originální funkce (viz vztah (4)). V oblasti originálů jde o asymptotický rozvoj funkce  $x(t)$ .

Lze ukázat [4], že koeficienty řady (6) jsou dány „lineárními regulačními plochami“ funkcí

$$(7) \quad {}^k x(t) = (-1)^k \int_t^\infty \int_{\tau_1}^\infty \dots \int_{\tau_{k-1}}^\infty x(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k.$$

„Lineární regulační plochy“ těchto funkcí jsou dány funkcionály, pro které lze psát rekurentní vztahy [4]

$$(8) \quad \varphi_{k-1} = {}^k f_x = \int_0^\infty {}^k x(t) dt = \\ = \frac{1}{a_0} (b_{k+1} - {}^{-1} f_x a_{k+1} - {}^0 f_x a_k - \dots - {}^{k-1} f_x a_1).$$

Vztahy (6) a (8) ukazují, že při vyhovující aproximaci se musí blížit koeficienty přenosových funkcí původní i náhradní soustavy (pro správně zvolený typ náhradní soustavy). Kontrola pomocí rozvoje v mocninové řadě je tedy jednoduchá ovšem

za cenu menší přesnosti. Zvolíme proto vzhledem k požadavku v bodu b) tento postup aproximace. Funkci  $X(t)$  budeme nejdříve aproximovat podle minima kvadrátu rozdílu původní a náhradní funkce pro nejhodnější zesílení s ohledem na kvalitu aproximace celého spektra funkcí  $X(t, r_0)$  při proměnném zesílení. Aproximaci zbytku spektra v méně důležitých oblastech budeme kontrolovat pomocí mocninových řad příslušných přenosů.

Zbývá rozhodnout, které zesílení je nejhodnější pro aproximaci na lineálu funkce  $W_2(0, \infty)$ . Napišme základní vztah pro aproximaci funkce  $x(t)$  v prostoru  $L_2(0, \infty)$

$$E = \|\bar{x} - x\|^2 = \int_0^\infty [\bar{x}(t) - x(t)]^2 dt.$$

Funkci  $x(t)$  přísluší přenos (2), funkci  $\bar{x}(t)$  přísluší přenos

$$\bar{F}_1(p) = \frac{\bar{M}(p)}{N(p) + r_0 \bar{M}(p)}.$$

Funkcionál citlivosti koeficientu  $\bar{a}_i$  je dán vztahem

$$(10) \quad \frac{\partial E}{\partial \bar{a}_i} = 2 \int_0^\infty [\bar{x}(t) - x(t)] \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i} \bar{x}(t) dt.$$

Jsou-li koeficienty přenosů  $F_2(p)$  a  $\bar{F}_2(p)$  stejné až na sledovaný koeficient  $\bar{a}_i$ , a  $(a_i - \bar{a}_i)$  je dostatečně malé, jsou funkcionály citlivosti určeny posloupností kvadrátů norem  $\{\|^{-1}v\|^2, \|^{-2}v\|^2, \dots, \|^{-n}v\|^2\}$

$$(10') \quad \frac{\partial E}{\partial \bar{a}_i} \doteq 2 \|^{-i}v\|^2 (\bar{a}_i - a_i),$$

kde  $^{-i}v(t) = d^i v / dt^i$  a funkci  ${}^0v(t) = v(t)$  přísluší přenos

$$(11) \quad F(p) = \frac{M(p)}{[N(p) + r_0 M(p)]^2}.$$

Plyne to ze vztahů pro výpočet součinu příslušných funkcí pomocí věty o konvoluci obrazů

$$(12) \quad \begin{aligned} & [\bar{x}(t) - x(t)] \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i} \bar{x}(t) = \\ & = \frac{(\bar{a}_i - a_i) p^i M(p)}{[N(p) + r_0 M(p)] [N(p) + r_0 M(p)]} * \frac{p^i M(p)}{[N(p) + r_0 M(p)]^2}, \\ & \quad [\bar{x}(t) - x(t)]^2 = \\ & = \frac{(a_i - \bar{a}_i) p^i M(p)}{[N(p) + r_0 M(p)] [N(p) + r_0 M(p)]} * \frac{(a_i - \bar{a}_i) p^i M(p)}{[N(p) + r_0 M(p)] [N(p) + r_0 M(p)]}. \end{aligned}$$

Funkcionál citlivosti musí splňovat dva protichůdné požadavky. Musí se rovnat nule, aby bylo splněno kritérium aproximace, ale musí být současně tak veliký, aby byla zaručena „stabilita“ numerického výpočtu aproximace.

V kvalitativních úvahách nehraje velikost funkcionálu (10) roli. V praxi, tj. při kvantitativním výpočtu, je odlišná situace. Přesnost aproximace je vždy omezena. Potom, chceme-li dosáhnout dobré aproximace, tj. co nejmenšího rozdílu koeficientů  $(\bar{a}_i - a_i)$ , musí být normy  $\|^{-i}v\|^2$  co největší. Jak ukazuje přenos (11) lze měnit hodnotu těchto norem jedině změnou zesílení  $r_0$ . Maximální hodnoty dosáhnou normy  $\|^{-i}v\|^2$  na mezi stability. Pro krajní hodnoty zesílení lze psát (pro  $(\bar{a}_i - a_i) > 0$ )

$$(13) \quad \left. \frac{\partial E}{\partial \bar{a}_i} \right|_{r_0=0} = \sigma; \quad \left. \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{a}_i \partial r_0} \right|_{r_0=0} = \bar{\sigma};$$

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \bar{a}_i} \right|_{r_0 \rightarrow r_{0k}} \rightarrow \infty; \quad \left. \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{a}_i \partial r_0} \right|_{r_0 \rightarrow r_{0k}} \rightarrow \infty.$$

Na základě vztahů (13) lze formulovat závěr:

Aproximace funkcí  $x(t)$  příslušných mezi stability ( $r_0 = r_{0k}$ ) na lineálu  $W_2(0, \infty)$  funkcí  $\bar{x}(t)$  je z hlediska „stability“ numerického procesu aproximace nejpříznivější případ z uvažovaných spekter funkcí  $X(t, r_0)$  a  $\bar{X}(t, r_0)$ .

#### 4. SLOŽKY DOMINANTNÍCH KOŘENŮ

V dalších odstavcích se pokusíme ukázat, že problém dominantních kořenů je základním problémem aproximace funkcí v úlohách regulační techniky. Úvahy o dominantních kořenech umožňují totiž rozdělení funkcí  $x(t)$  na podstatnou a nepodstatnou část. Dále je třeba zdůraznit, že jedině na základě dominantních kořenů lze aproximovat funkci  $x(t)$  na lineálu  $W_2(0, \infty)$  pomocí vlastností uzavřeného regulačního obvodu na mezi stability, jak ukážeme v odst. 5. Nejdříve uvedeme některé nejdůležitější pojmy podle práce [4].

Funkce  $x(t)$  podle vztahu (4) lze rozdělit na dvě části

$$(14) \quad x(t) = h(t) + g(t),$$

kde  $h(t)$  jsou složky dominantních kořenů a  $g(t)$  jsou složky všech ostatních kořenů.

Dominantní kořeny jsou kořeny s největší absolutní hodnotou.

V práci [4] je uvedena tato definice:

Kořeny příslušné složce  $h(t)$  jsou dominantní, splňují-li hodnoty složek  $h(t)$  a  $g(t)$  v okamžiku maximální odchylky nerovnost

$$(15) \quad \left| \frac{g(t_m)}{h(t_m)} \right| \leq \varepsilon.$$

V práci [4] je uvedeno kritérium dominantnosti kořenů, založené na vyhodnocení vztahu (15).

Na obr. 1 je velikost složky  $g(t)$  vyznačena šrafováním. Hodnoty důležité pro posouzení regulačního pochodu jsou dány pouze složkami dominantních kořenů  $h(t)$ .

##### 5. APROXIMACE FUNKCÍ $x(t)$ POMOCÍ DOMINANTNÍCH KOŘENŮ

Zabývejme se aproximací funkcí  $x(t)$  funkcemi stejné třídy  $\bar{x}(t)$  za těchto předpokladů:

- Podle úvah o koeficientech citlivosti budeme aproximovat na lineálu  $W_2(0, \infty)$  funkci  $x(t)$ , která přísluší regulačnímu obvodu podle přenosu (2) na mezi stability.
- Pomocí kritéria dominantnosti kořenů v práci [4] jsme zjistili, že existuje výrazná dominantní složka příslušná dominantním kořenům  $p_{1,2} = \pm j\omega_k$ .
- Známe typ náhradní funkce  $\bar{x}(t)$ . Určení typu náhradní funkce je věnován odst. 6 a 7.

Pro vzdálenost prvků v prostoru  $L_2(0, \infty)$  platí vztah (9)

$$d(x, \bar{x}) = \|x - \bar{x}\|.$$

Po dosazení vztahu (14) dostaneme

$$(16) \quad d(x, \bar{x}) = \left( \int_0^{\infty} [h(t) + g(t) - \bar{h}(t) - \bar{g}(t)]^2 dt \right)^{1/2}.$$

Chyba aproximace bude konečná jedině pro

$$(17) \quad h(t) \equiv \bar{h}(t).$$

Potom vzdálenost funkcí  $x(t)$  a  $\bar{x}(t)$  je určena složkami  $g(t)$  a  $\bar{g}(t)$

$$(18) \quad d(x, \bar{x}) = d(g, \bar{g}).$$

Platí-li kritérium dominantnosti pro kořeny složky  $h(t)$ , je chyba aproximace v nepodstatné části na začátku regulačních pochodů (obr. 1). Vzdálenost funkcí  $g(t)$  a  $\bar{g}(t)$  není proto důležitá pro kvalitu aproximace podle vztahu (16). Vzdálenost těchto funkcí rozhoduje však o kvalitě aproximace při jiných zesíleních  $r_0 (r_0 < r_{0k})$ , jak ukážeme v odst. 6.

Aproximace pomocí dominantních kořenů je dána vztahem (17). Chyba této aproximace je určena kritériem dominantnosti kořenů v práci [4], tzn. vztahem (15).

Naznačme postup výpočtu náhradního přenosu soustavy podle vztahu (17). Vyjdeme z náhradního přenosu regulačního obvodu na mezi stability

$$(19) \quad \bar{F}_z(p) = \frac{\sum_{i=0}^r \bar{b}_i p^i}{(B_2 p^2 + B_1 p + 1) \sum_{k=0}^{q-2} a_k^* p^k} = \frac{R(p)}{(B_2 p^2 + B_1 p + 1) Q^*(p)}.$$

Při aproximaci podle vztahu (17) se musí rovnat dominantní kořeny příslušné složkám  $h(t)$  a  $\bar{h}(t)$  ( $p_{1,2} = \pm j\omega_k$ ) a dále se musí rovnat koeficienty těchto složek

$$(20) \quad \bar{C}_{1,2} = C_{1,2} \Big|_{p_{1,2} = \pm j\omega_k}.$$

Vztahy pro koeficienty  $C_1$  a  $C_2$  odvodíme z přenosů (2) a (19). Po dosazení do vztahu (20) a úpravě dostaneme (pro  $\bar{b}_0 = b_0$ ;  $a_0 + b_0 r_{0k} = a_0^*$ )

$$(21) \quad B_2 p^2 + B_1 p + 1 \Big|_{p = \pm j\omega_k} = \frac{R(p) \frac{d}{dp} [N(p) + r_0 M(p)]}{M(p) \frac{d}{dp} Q^*(p)} \Big|_{p = \pm j\omega_k} = \frac{G(\omega_k) \pm j\omega_k H(\omega_k)}{E(\omega_k) \pm j\omega_k D(\omega_k)},$$

kde  $G(\omega_k)$  popř.  $E(\omega_k)$  je sudá část čitatele popř. jmenovatele a  $j\omega_k H(\omega_k)$  popř.  $j\omega_k D(\omega_k)$  je lichá část čitatele popř. jmenovatele výrazu (21) po dosazení dominantních kořenů. Ze vztahu (21) dostáváme dvě rovnice, ze kterých vypočteme koeficienty  $B_1$  a  $B_2$

$$(22) \quad B_1 = \frac{E(\omega_k) H(\omega_k) - D(\omega_k) G(\omega_k)}{E^2(\omega_k) + \omega_k^2 D^2(\omega_k)},$$

$$B_2 = \frac{1}{\omega_k^2} \left[ 1 - \frac{G(\omega_k) E(\omega_k) + \omega_k^2 H(\omega_k) D(\omega_k)}{E^2(\omega_k) + \omega_k^2 D^2(\omega_k)} \right].$$

Dominantními kořeny a vztahy (20) jsou určeny pouze čtyři koeficienty v přenosu (19). Zbývající koeficienty vypočteme z dalších podmínek aproximace, jak je uvedeno v příštím odstavci. Pouze pro čtvrtý řád náhradní soustavy  $q = 4$  a konstantu v čitateli přenosu (19) postačí pro výpočet aproximace vztahy uvedené v tomto odstavci.

Výpočet aproximačního přenosu je podle uvedených vztahů poměrně jednoduchý (viz také příklad). Přitom jde o aproximaci poměrně přesnou. Ukazuje to skutečnost, že aproximační přenosy typu (19) s konstantou v čitateli mají jmenovatel minimálně čtvrtého stupně.

Vztahy (20) a (21) ukazují, že lze zvolit náhradní přenos libovolného typu. Např. lze také přesunout polynom s koeficienty  $B_1$  a  $B_2$  v přenosu (19) do čitatele. Pro výpočet lze opět použít obdoby vztahu (21).



Dosud jsme uvažovali jen regulační obvody s proporcionálním regulátorem. Aproximace funkcí  $x(t)$  příslušných obvodů s jinými regulátory lze řešit stejným způsobem. Musí být ovšem zaručena dominantnost složky  $h(t)$ , jak je uvedeno v lit. [4], [5].

## 6. VÝPOČET DALŠÍCH KOEFICIENTŮ PŘENOSU (19)

V tomto odstavci se budeme zabývat doplňujícími vztahy pro výpočet koeficientů  $a_k^*$  popř.  $\bar{b}_i$  v přenosu (19). Výchozím bodem by měl být vztah (18). Aproximace funkce  $g(t)$  podstatně neovlivní přesnost aproximace funkce  $x(t)$  (viz odst. 5), bude proto rozhodujícím hlediskem pro výpočtové postupy aproximace složky  $g(t)$  jednoduchost. Postačí proto, budeme-li řešit shodu funkcí  $g(t)$  a  $\bar{g}(t)$  na základě rozvoje v mocninové řady.

K funkcím  $g(t)$  popř.  $\bar{g}(t)$  nelze jednoduše stanovit příslušné obrazy (přenosy). Podle práce [4] zavedeme proto funkce  ${}^k s(t)$  popř.  ${}^k \bar{s}(t)$ , pro které platí obdoba vztahu (7)

$$(23) \quad {}^k s(t) = (-1)^k \int_t^\infty \int_{\tau_1}^\infty \dots \int_{\tau_{k-1}}^\infty s(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k.$$

Kořeny příslušné funkcím  ${}^k s(t)$  a  $g(t)$  jsou totožné. Liší se pouze jejich residua v té části, která je určena dominantními kořeny [4]. Funkci  ${}^0 s(t)$  pro  ${}^0 s(\infty) = 0$  přísluší přenos, který vypočteme vydělením jmenovatele přenosu (2) polynomem dominantních kořenů a odečtením ustálené hodnoty

$$(24) \quad {}^0 F_m(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i - \frac{b_0}{a_0} \sum_{j=0}^{n-2} d_j p^j}{\sum_{j=0}^{n-2} d_j p^j} = \frac{{}^0 P(p)}{S(p)}.$$

Další přenosy  ${}^k F_m(p)$  příslušné funkcím  ${}^k s(t)$  pro  ${}^k s(\infty) = 0$  mají jmenovatel shodný se jmenovatelem přenosu (24) a čitatele  ${}^k P(p)$  lze počítat podle rekurentního vztahu

$$(25) \quad {}^k P(p) = \frac{1}{p} \left[ {}^{k-1} P(p) - \frac{{}^{k-1} P(0)}{S(0)} S(p) \right].$$

Zavedme ještě funkcionály  ${}^k f_s$  příslušné funkcím  ${}^k s(t)$  (viz vztah (8))

$$(26) \quad \begin{aligned} {}^{-1} f_s &= \int_0^\infty {}^{-1} s(t) dt = \frac{b_0}{d_0}, \\ {}^k f_s &= \int_0^\infty {}^k s(t) dt = \frac{1}{d_0} (b_{k+1} - {}^{-1} f_s d_{k+1} - {}^0 f_s d_k - \dots - {}^{k-1} f_s d_1). \end{aligned}$$

286 Funkcionály  ${}^k f_s$  jsou vázány s počátečními hodnotami funkcí vztahem

$$(27) \quad {}^k s(0) = {}^{k-1} f_s .$$

Přenosy  ${}^k F_m(p)$  lze rozvinout v mocninové řady v okolí bodu  $p = 0$ . Koefficienty těchto řad jsou dány funkcionály  ${}^k f_s$ . Pro přenos  ${}^0 F_m(p)$  dostaneme

$$(28) \quad {}^0 F_m(p) = {}^{-1} f_s + {}^0 f_s p + {}^1 f_s p^2 + \dots$$

Dosud jsme předpokládali rušivou funkci ve tvaru skoku. Pomocí MacLaurinovy řady (28) lze řešit jednoduše úlohu aproximace i pro jiné tvary vstupního signálu – pro impuls a pro integrály skoku. Zjednodušeně podle [4] lze říci, že počet dominantních kořenů a tvar vstupního signálu určuje počet integrací ve vztahu (23) a tím i rozhodující koeficient v řadě (28).

Tim jsme splnili požadavek v bodu ad c), odst. 2, dovedeme jednoduše hodnotit výsledky aproximace při změnách tvaru vstupního signálu. Význam této skutečnosti vynikne v plné míře, porovnáme-li jednoduchost hodnocení tvaru vstupního signálu pomocí řady (28) s potížemi při volbě váhových funkcí při aproximaci v prostoru  $L_2(0, \infty)$ .

Koefficienty náhradního přenosu  ${}^0 \bar{F}_m(p)$  budeme tedy počítat ze vztahu

$$(29) \quad {}^k f_s = {}^k \bar{f}_s ,$$

kde funkcional  ${}^k \bar{f}_s$  přísluší náhradní funkci  ${}^k \bar{s}(t)$ . Přenosy  ${}^k \bar{F}_m(p)$  a funkcionaly  ${}^k \bar{f}_s$  odvodíme z přenosu (19) postupem popsaným při odvození vztahů (24) a (26). Index  $k$  ve vztahu (29) volíme podle tvaru vstupního signálu (např. pro vstupní signál skok  $k = 2$ ). Ze vztahů (26) plyne, že musíme vlastně splnit vztah (29) i pro  $k < 2$ . Dostaneme soustavu nelineárních rovnic, kterou řešíme iterační metodou. Pokud nepočítáme více než čtyři koeficienty, což bude v aplikacích krajní případ, nečiní řešení soustavy rovnic potíže (viz příklad). U složitějších náhradních soustav je lépe zvolit aproximaci rozvojem v mocninovou řadu typu (6) s korekcemi nahrazujícími podmínky (17) a (22). Bližší popis této aproximace je již mimo rámec této práce.

Konečnou korekci náhradního přenosu (19) vypočteme pomocí vztahů (22). Tzn. že konstanty  $\bar{B}_1$  a  $\bar{B}_2$  počítáme jednou ze vztahů (29) a konstanty  $B_1$  a  $B_2$  ještě jednou ze vztahů (22). Shoda obou výsledků ( $\bar{B}_1 \approx B_1$ ;  $\bar{B}_2 \approx B_2$ ) ukazuje, že byl správně zvolen typ náhradní funkce.

## 7. KLASIFIKACE FUNKCÍ

Názvem klasifikace funkcí označujeme třídění funkcí podle vhodně vybraných souborů charakteristických parametrů a současně i postup, který vede k zařazení dané funkce do určité třídy funkcí. Zdůrazněme, že klasifikace funkcí je zdrojem největších chyb aproximace funkcí. Hledejme nejdříve kritérium klasifikace funkcí.

Minimum kvadrátu rozdílu původní a náhradní funkce nelze použít. Protože hledáme co nejjednodušší náhradní funkci, potřebujeme naopak vědět, jaká maximální chyba je ještě únosná. V odst. 2 požadujeme vyhovující shodu celého spektra funkcí pro všechna zesílení  $r_0 = 0$  až  $r_0 = r_{0k}$ . Kritérium klasifikace funkcí odvodíme z tohoto požadavku.

Typ náhradní funkce  $\bar{x}(t)$  byl správně zvolen, je-li dosaženo postačující shody mocninových rozvoji (6) příslušných původní a náhradní soustavy, tzn. pro druhý krajní bod spektra pro  $r_0 = 0$ . Porovnáváme mocninové řady příslušné přenosu (1)

$$(30) \quad F_S(p) = \varphi_0 + \varphi_1 p + \varphi_2 p^2 + \dots$$

a přenosu náhradní  $\bar{F}_S(p)$

$$(31) \quad \bar{F}_S(p) = \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_1 p + \bar{\varphi}_2 p^2 + \dots$$

Koeficienty  $\varphi_k$  jsou určeny vztahem (8). Přenos náhradní soustavy  $\bar{F}_S(p)$  počítáme z přenosu (19)

$$(32) \quad \bar{F}_S(p) = \frac{R(p)}{(B_2 p^2 + B_1 p + 1) Q^*(p) - r_{0k} R(p)}.$$

Z rozboru funkcionálu (8) v práci [4] plyne, že je třeba porovnávat poměry funkcí

$$(33) \quad \sigma_k \approx \bar{\sigma}_k,$$

kde

$$\sigma_k = \frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}} \quad \text{a} \quad \bar{\sigma}_k = \frac{\bar{\varphi}_k}{\bar{\varphi}_{k+1}}.$$

Tím omezíme porovnávání mocninových řad na několik málo členů.

Pomocí vztahu (30) až (33) lze určit, která ze dvou náhradních funkcí je výhodnější. Přímé určení typu náhradní funkce bude patrně řešitelné na základě majorant a minorant vybraných typů funkcí  $\bar{x}(t)$ . Úvahy o tomto problému jsou již mimo rámec této práce. V tomto odstavci uvedeme jen dva grafy a některé důležitější zásady podle práce [5].

Na obr. 2 je uveden graf pro soustavu třetího řádu

$$(34) \quad \bar{F}_S(p) = \frac{\frac{1}{a_3}}{p^3 + \frac{a_2}{a_3} p^2 + \frac{a_1}{a_3} p + \frac{1}{a_3}} =$$

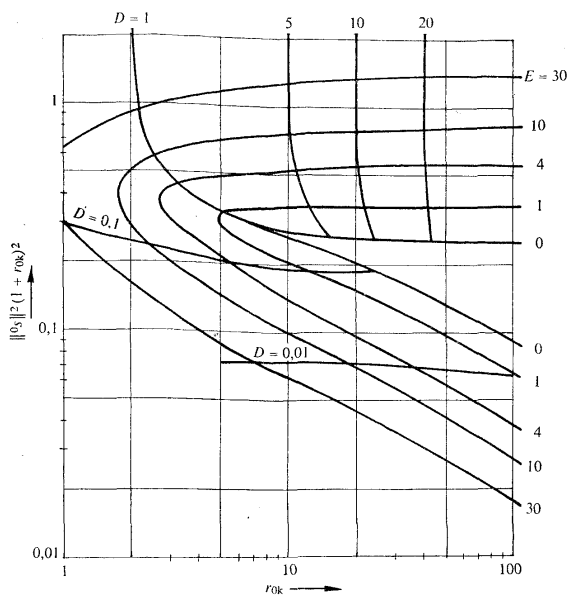
$$= \frac{1}{p^3 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) p^2 + (2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \omega_2^2) p + \alpha_1(\alpha_2^2 + \omega_2^2)} =$$

$$= \frac{\alpha_1^3 + \alpha_1(1+E)D^2}{p^3 + \alpha_1(1+2D)p^2 + \alpha_1^2 D[2 + D(1+E)]p + \alpha^3(1+E)D^2},$$

kde

$$D = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \quad E = \frac{\omega_k^2}{\alpha_2^2}.$$

Křivky v obr. 2 ukazují závislost normy funkce  ${}^0s(t)$  na kritickém zesílení  $r_{ok}$  (pro kritickou frekvenci  $\omega_k = \pm 1$ ). Norma funkce  ${}^0s(t)$  charakterizuje polohu třetího kořene. Graf na obr. 2 podává výstižný obraz široké třídy funkcí, kdy je možno složku  $g(t)$  nahradit složkou  $\bar{g}(t)$  příslušnou jedinému kořenu.



Obr. 2. Pomocný graf náhradních soustav třetího řádu.

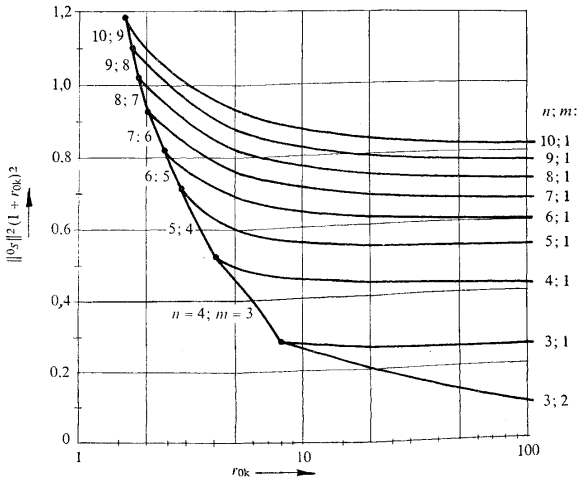
Na obr. 3 je graf soustav, které se nejčastěji vyskytují v technické praxi. Přenos těchto soustav má tvar

$$(35) \quad \bar{F}_s(p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (T_k p + 1)}.$$

V obr. 3 jsou zakresleny pouze minoranty a majoranty soustav typu (35) až do desátého řádu. Jak bylo ukázáno v práci [5], odpovídají majorantám a minorantám funkcí  $\bar{x}(t)$  typu (35) přenosy

$$(36) \quad \bar{F}_s(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1)^m (T_2 p + 1)^{n-m}} \quad \text{pro } T_1 \geq T_2.$$

Protože výpočet normy  $\|{}^0s\|$  je podstatně jednodušší, vynášíme křivky v obr. 3 v závislosti na této normě místo rozhodující normy  $\|{}^2s\|$ . Je třeba si proto uvědomit, že tím zdůrazňujeme kořeny s velkou absolutní hodnotou.



Obr. 3. Pomocný graf pro určení náhradních přenosů typu (35).

## 8. PŘÍKLAD

Použití vztahů a grafů v předcházejících odstavcích ukážeme na příkladu převzatém z práce [5]. Jde o aproximaci přenosu soustavy

$$F_s(p) = 1 / (1330000p^8 + 3380000p^7 + 3548000p^6 + 1969700p^5 + 626000p^4 + 111900p^3 + 10285p^2 + 366,1p + 1).$$

Typ náhradní funkce určíme podle grafu na obr. 3. Jde totiž o soustavu typu (45), což si ověříme pomocí Eulerových nerovností pro koeficienty polynomu ve

290 jmenovateli

$$(37) \quad a_j^2 \cong a_{j-1} a_{j+1} \left(1 + \frac{1}{j}\right) \left(1 + \frac{1}{l}\right),$$

kde  $j + l = n$ .

K určení bodu v grafu na obr. 3 potřebujeme znát kritické zesílení ( $r_{ok} = 27,4$ ), kritickou frekvenci ( $\omega_k = 0,059$ ) a normu funkce  ${}^0s(t)$ . Podle vztahu (24) napíšeme nejdříve přenos příslušný funkci  ${}^0s(t)$ . Podle vztahu (24) napíšeme nejdříve přenos příslušný funkci  ${}^0s(t)$  pro  ${}^0s(0) = 0$

$${}^0F_m^*(p) = \frac{1}{(163,6p^6 + 416p^5 + 435p^4 + 240p^3 + 75,4p^2 + 12,9p + 1)}.$$

Normu  $\|{}^0s\|^2$  vypočteme pomocí algoritmu popsaného v práci [7]. Routh-Schurovou redukcí polynomu  $V_n$  ve jmenovateli přenosu  ${}^0F_m^*(p)$  dostaneme polynom o jeden stupeň nižší

$$(38) \quad V_{n-1}(p) = V_n(p) - \frac{a_n}{a_{n-1}} p V_s(p),$$

kde  $V_s(p)$  je sudá nebo lichá část polynomu  $V_n(p)$  podle toho, je-li  $n$  liché nebo sudé. Norma funkce  ${}^0s(t)$  je dána vztahem

$$(39) \quad \|{}^0s\|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

kde  $\lambda_i = a_n/(a_{n-1})$  jsou poměry nejvyšších koeficientů původního i všech redukováných polynomů stupně jedna až  $n$ . Podle vztahu (39) vypočteme v řešeném příkladu  $\|{}^0s\|^2 (1 + r_{ok})^2 = 10,45$ . Tento výsledek přepočteme pro  $\omega_k = \pm 1$  tzn.  $\|{}^0s\|^2 (1 + r_{ok})^2 \omega_k = 0,61$ . Podle grafu na obr. 3 je náhradní soustava šestého řádu.

Zvolme náhradní přesnos  ${}^0\bar{F}_m(p)$  ve tvaru (pro  ${}^0s(0) = 0$ )

$$\begin{aligned} {}^0\bar{F}_m(p) &= \frac{1}{[(\bar{B}_2 p^2 + \bar{B}_1 p + 1)(C_2 p^2 + C_1 p + 1)]} = \\ &= \frac{1}{(\tau_4 p^4 + \tau_3 p^3 + \tau_2 p^2 + \tau_1 p + 1)}. \end{aligned}$$

Podle vztahu (29) pro  $k = 2$  dostaneme

$${}^2f_s = -478 \cong {}^2\bar{f}_s = -\tau_3 {}^{-1}\bar{f}_s - \tau_2 {}^0\bar{f}_s - \tau_1 {}^1\bar{f}_s.$$

Pro koeficienty  $\tau_i$  dostaneme soustavu rovnic, ze kterých vypočteme  $C_1 = 9,6$ ;  $C_2 = 28,4$ ;  $\bar{B}_1 = 3,3$ ;  $\bar{B}_2 = 15,3$ . Ze vztahů (22) vypočteme  $B_1 = 3,32$ ;  $B_2 = 15,5$ . Podle dobré shody koeficientů  $\bar{B}_1 \approx B_1$ ;  $\bar{B}_2 \approx B_2$  lze soudit, že byl správně zvolen

typ náhradní funkce. Výsledný přenos náhradní soustavy má tento tvar

291

$$\begin{aligned} \bar{F}_s(p) &= \\ &= 1/(3580000p^6 + 1974000p^5 + 627600p^4 + 111930p^3 + 10290p^2 + 366,8p + 1). \end{aligned}$$

Vzhledem k dobré shodě odpovídajících koeficientů původního a náhradního přenosu lze upustit od kontroly porovnáním mocninových řad (30) a (31).

(Došlo dne 3. října 1966.)

#### LITERATURA

- [1] N. I. Achijezer: Teorie aproximací. NČSAV, Praha 1955 (překlad z ruštiny).
- [2] G. Meinardus: Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Springer Verlag, Berlin 1964.
- [3] J. Štěpán: Některé problémy identifikace regulovaných soustav. Automatizace (1964), 12.
- [4] J. Štěpán: Kritérium dominantnosti kořenů. Kybernetika 2, 3 (1967), 1, 57–68.
- [5] J. Štěpán: Aproximace přenosu jednoho typu soustav pomocí dominantních kořenů. Výzk. zpráva ÚTIA ČSAV – č. 104 (1962).
- [6] Faddejev D. K., Faddejevová V. N.: Numerické metody lineární algebry. SNTL, Praha 1964.
- [7] Nekolný J.: Současná kontrola stability a jakosti regulace. In: Souhrn prací o automatizace 1959. Sk NČSAV, Praha 1961.

---

#### SUMMARY

### Approximation of Functions in Problems of Control Engineering

JAROMÍR ŠTĚPÁN

In the first section the demands on approximation of functions of the type (4) in problems of control engineering are formulated. From the analysis given in the second section it follows that the best suited is the criterion of approximation using the least mean square of the difference between the original and the substitute functions.

Functionals of sensitivity given by relationship (10) must be near zero to fulfil the criterion of approximation, but simultaneously they must be sufficiently large to fulfil the condition of the "stability" of the numerical process of approximation. It is shown (expressions (13)) that the best approximation from the viewpoint of the "stability" of numerical process is the approximation of functions describing control processes proceeding in closed control loops at the limit of stability. The approximation of functions in problems of control engineering must be then defined as the

approximation of the spectrum of functions describing the output signals from control loops for various values of controller parameters. For the sake of simplicity the discussion is confined to the most important parameter of controllers, i.e. to gain coefficient  $r_0$ .

The section 5 describes the approximation of functions  $x(t)$  pertinent to the limit of the stability by means of dominant roots, i.e. roots having the smallest absolute value. This approximation is given by relationship (17) ( $h(t)$  is component of dominant roots). The spacing of functions  $g(t)$  and  $\bar{g}(t)$  according to expr. (18) is decisive for the type of the substitute functions  $\bar{x}(t)$  (section 6). There are given two diagrams for direct estimation of the type of substitute functions (Fig. 2 and 3).

*Ing. Jaromír Štěpán, CSc., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.*