

# Numerické řešení Wienerovy-Hopfovy rovnice při statistické identifikaci lineární dynamické soustavy

ANNA FOŘTOVÁ, JIŘÍ KRÝŽE, VÁCLAV PETERKA

Článek se zabývá určením neznámé váhové funkce lineární dynamické soustavy, je-li známa autokorelační funkce náhodného vstupního signálu a vzájemně korelační funkce výstupního a vstupního signálu soustavy. Předpokládá se, že korelační funkce jsou zadány grafem nebo tabulkou. Odvozuje se metoda řešení této úlohy založená na oboustranné transformaci Z.

## 1. ÚVOD

Myšlenka použití metod statistické dynamiky pro experimentální vyšetřování dynamických vlastností lineárních soustav není nikterak nová. Teoreticky byla v literatuře již mnohokrát diskutována (viz např. [1] až [13]) a objevila se i nevelká řada prací, které se snaží o její praktické využití [1, 2, 4 až 8].

Přestože se teoreticky jeví jako velmi slibná, praktické výsledky zatím dosažené nejsou příliš uspokojivé a metoda nenalezla dosud širokého praktického uplatnění. Příčiny těchto dosavadních neúspěchů jsou v podstatě dvojího druhu. Jsou to jednak obtíže realizační a jednak některé nedořešené teoretické otázky.

Statistický přístup k otázce experimentální identifikace dynamické soustavy přináší podstatné výhody především v takových případech, kdy soustava podléhá působení neměřitelných náhodných poruch, které znehodnocují měření jednorázová. Vliv takovýchto poruch je možno eliminovat pouze dlouhodobým pozorováním soustavy a statistickým vyhodnocením naměřených vstupních a výstupních signálů. Korelační analýza, na které se dosavadní statistická identifikace zpravidla zakládá, je statistickou metodou limitní, tj. dává teoreticky přesné výsledky až po nekonečné době pozorování. Při praktické aplikaci této metody je ovšem třeba omezit se na časové intervaly konečné. Teoretické rozborů ukazují, že pro dosažení spolehlivých výsledků je často třeba statisticky zpracovat desítky až stovky tisíců hodnot naměřených vstupních a výstupních signálů. Zpracování takového množství hodnot není myslitelné bez použití matematických strojů a automatizace celého výpočtu včetně zavádění zpracovávaných dat do stroje. Výpočty, které přicházejí pro daný účel v úvahu, mají svůj specifický charakter. Vyznačují se poměrně jednoduchým algoritmem a mimořádnými nároky na paměť a rychlost stroje, má-li být výsledku dosaženo v rozumně krátké době. Běžné univerzální číslicové počítače těmto nárokům plně nevyhovují a jeví se proto účelné konstruovat stroj speciální. Z těchto důvodů byl v ÚTIA ČSAV vyvinut šestikanálový magnetofonový univerzální statistický analyzátor MUSA 6 a byl tak vytvořen důležitý předpoklad pro širší uplatnění statistických metod u nás.

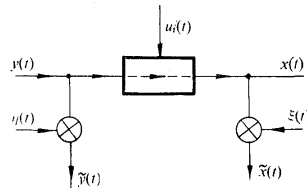
Vedle popsanych obtíží realizačních vyskytují se při identifikaci soustav statistickými metodami některé obtíže teoretického rázu. Jednou z nejvýznamnějších překážek tohoto druhu je v současné době ta skutečnost, že nebyla dosud vypracována spolehlivá metoda numerického řešení integrální rovnice, která váže hledanou váhovou funkci (impulsní charakteristiku) lineární soustavy se

vzájemnou korelační funkci vstupního a výstupního signálu a autokorelační funkci vstupního signálu. Účelem předkládané práce je vyplnění této mezery.

Protože se v literatuře objevily kolem zmíněné integrální rovnice některé nejasnosti principiálního charakteru, odvodíme ji nejprve a ukážeme, že se jedná o rovnici Wienerovu - Hopfovou.

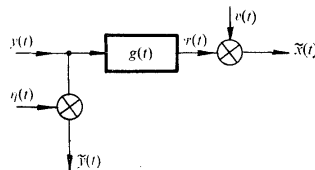
## 2. STATISTICKÝ ODHAD NEZNÁMÉ VÁHOVÉ FUNKCE LINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SOUSTAVY

Uvažujme lineární dynamickou soustavu podle obr. 1, jejímž vstupním signálem  $y$  je spojitý stacionární náhodný proces. Vedle tohoto vstupního signálu působí na



Obr. 1.

uvažovanou soustavu jedna nebo více náhodných poruch  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), které jsou rovněž stacionární s nulovou střední hodnotou, jsou však neměřitelné. Jedinými informacemi o vyšetřované soustavě, které máme k dispozici, jsou změřené průběhy vstupního a výstupního signálu  $\tilde{y}(t)$  a  $\tilde{x}(t)$ . Chyba, která při každém měření vzniká,



Obr. 2.

je ve schématu na obr. 1 respektována veličinami  $\eta(t)$  a  $\xi(t)$ , o kterých předpokládáme, že jsou rovněž náhodné stacionární s nulovou střední hodnotou. Podle principu superpozice platného pro lineární soustavy můžeme všechny poruchy  $u_i(t)$  redukovat na výstup soustavy a společně s chybou  $\xi(t)$  je uvažovat jako jedinou poruchu  $v(t)$  (obr. 2). O poruše  $v(t)$  víme, že je rovněž stacionární s nulovou střední hodnotou, další její statistické charakteristiky však neznáme.

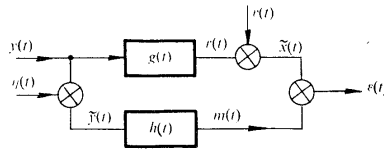
Vyšetřované soustavě s váhovou funkcí  $g(t)$  přiřadíme matematický model s váhovou funkcí  $h(t)$ , kterou určíme tak, aby byla odhadem pro neznámou váhovou funkci  $g(t)$ .

Odezva modelu i odezva soustavy na tentýž vstupní signál mají tedy být stejné, nepůsobí-li poruchy  $u_i$ . V praxi ovšem nemáme k dispozici ani průběh  $y(t)$  ani  $x(t)$  a tak musíme pracovat s naměřenými signály  $\tilde{y}(t)$  a  $\tilde{x}(t)$  zatíženými chybou. Ukážeme si, že i z těchto signálů je možno dostat vyhovující odhad, vyjdeme-li z požadavku, aby střední kvadratická odchylka mezi naměřeným výstupem soustavy  $\tilde{x}(t)$  a naměřeným výstupem modelu  $m(t)$  (obr. 3) byla minimální:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varepsilon^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [\tilde{x}(t) - m(t)]^2 dt = \min.$$

Nejprve si vyjádříme  $\int_{-T}^{+T} \varepsilon^2(t) dt$  jako funkcional vzhledem k váhové funkci  $h(t)$ :

$$\varepsilon(t) = \tilde{x}(t) - m(t),$$



Obr. 3.

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \tilde{y}(t - \tau) d\tau$$

a tedy

$$(1) \quad \int_{-T}^{+T} \varepsilon^2(t) dt = \int_{-T}^{+T} \tilde{x}^2(t) dt - 2 \int_{-T}^{+T} \tilde{x}(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) \tilde{y}(t - t_1) dt_1 dt + \\ + \int_{-T}^{+T} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) \tilde{y}(t - t_1) dt_1 \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2) \tilde{y}(t - t_2) dt_2 \right] dt.$$

Zavedeme-li do (1) korelační funkce definované vztahem

$$R_{ab}(\tau) = \overline{a(t) b(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} a(t) b(t + \tau) dt = \\ = \overline{a(t - \tau) b(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} a(t - \tau) b(t) dt$$

a dále symbol

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varepsilon^2(t) dt = \overline{\varepsilon^2(t)},$$

334 máme po provedení limity a po úpravě

$$(2) \quad \overline{\varepsilon^2(t)} = R_{\overline{xx}}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) R_{\overline{yx}}(t_1) dt_1 + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2) R_{\overline{yy}}(t_1 - t_2) dt_2 dt_1.$$

Váhovou funkci, minimalizující  $\overline{\varepsilon^2(t)}$ , budeme nyní hledat pomocí variačního počtu. Je-li  $h_{\text{opt}}$  hledaným řešením, pak pro funkci

$$(3) \quad h(t) = h_{\text{opt}}(t) + \lambda h_{\lambda}(t),$$

(kde  $h_{\lambda}(t)$  je libovolná realizovatelná váhová funkce a  $\lambda$  koeficient, nabývající různých hodnot) musí při  $\lambda \neq 0$  vždy  $\overline{\varepsilon^2(t)}$  nabýt větší hodnoty než pro  $\lambda = 0$ . Dosazením (3) do (2) se stává (2) funkcí argumentu  $\lambda$  a nabývá své minimální hodnoty pro  $\lambda = 0$ . Derivujeme-li tedy (2) podle  $\lambda$  a derivaci položíme rovnou 0, dostáváme podmínku, z níž lze vypočítat hledanou funkci  $h_{\text{opt}}(t)$ :

$$(4) \quad \left[ \frac{d\overline{\varepsilon^2(t)}}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{\lambda}(t_1) R_{\overline{yx}}(t_1) dt_1 + \\ + 2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{\lambda}(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(t_2) R_{\overline{yy}}(t_1 - t_2) dt_2 dt_1 = \\ = 2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{\lambda}(t_1) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(t_2) R_{\overline{yy}}(t_1 - t_2) - R_{\overline{yx}}(t_1) \right] dt_2 dt_1 \stackrel{!}{=} 0.$$

Zde  $h_{\lambda}(t)$  je libovolná realizovatelná váhová funkce, tj.  $h_{\lambda}(t)$  musí být pro záporné časy nulová. Kdybychom nerespektovali podmínku

$$h_{\lambda}(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0,$$

připouštěli bychom i takový matematický model soustavy, jehož odezva na daný vstupní signál se objeví dříve než tento signál sám a to je fyzikálně nesmyslné.

Vztah (4) je tedy pro záporné časy anulován funkcí  $h_{\lambda}(t)$ , ať je hodnota v hranaté závorce jakákoliv. Pro kladné časy je možno (4) splnit jediným způsobem; musí totiž platit

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2) R_{\overline{yy}}(t - t_2) dt_2 - R_{\overline{yx}}(t) = 0$$

pro  $t \geq 0$ .

Integrovní rovnice (5) je, jak známo, rovnicí Wienerovou - Hopfovou.

Skutečnost, že stačí, aby integrovní rovnice (5) pro neznámou  $h(t)$  byla při identifikaci splněna pouze pro  $t \geq 0$ , není v literatuře o identifikaci zpravidla uváděna,

ačkoliv právě toto její omezení umožňuje zajistit podmínku realizovatelnosti hledané funkce  $h(t)$ .

Zbývá zjistit, jaké podmínky musí splňovat rušivé signály  $v(t)$  a  $\eta(t)$ , má-li se  $h(t)$  vypočtená na základě rovnice (5) co nejvíce blížit ke  $g(t)$ .

Podle obr. 2 platí

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\vartheta) &= r(\vartheta) + v(\vartheta), \\ r(\vartheta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_2) \tilde{y}(\vartheta - t_2) dt_2 - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_2) \eta(\vartheta - t_2) dt_2, \\ (6) \quad \tilde{x}(\vartheta + t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_2) \tilde{y}(\vartheta + t - t_2) dt_2 - \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_2) \eta(\vartheta + t - t_2) dt_2 + v(\vartheta + t). \end{aligned}$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice (6)  $1/2T \cdot \tilde{y}(\vartheta)$ , integrujeme podle  $\vartheta$  v mezích  $\langle -T, T \rangle$  a limitujeme pro  $T \rightarrow \infty$ , máme po zavedení příslušných symbolů korelačních funkcí

$$(7) \quad \begin{aligned} R_{\tilde{y}\tilde{x}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_2) R_{\tilde{y}\tilde{y}}(t - t_2) dt_2 - \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_2) R_{\tilde{y}\eta}(t - t_2) dt_2 + R_{\tilde{y}v}(t) \end{aligned}$$

a po dosazení  $R_{\tilde{y}\tilde{x}}$  ze (7) do (5)

$$(8) \quad \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\tilde{y}\tilde{y}}(t - t_2) [h(t_2) - g(t_2)] dt_2 + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_2) R_{\tilde{y}\eta}(t - t_2) dt_2 - R_{\tilde{y}v}(t) = 0. \end{aligned}$$

Rovnice (8) vyjadřuje vliv poruchových signálů v obecné formě.

Ve zvláštním případě pro

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t_2) R_{\tilde{y}\eta}(t - t_2) dt_2 - R_{\tilde{y}v}(t) \rightarrow 0$$

bude se i  $h(t)$  blížit ke  $g(t)$ .

Jsou-li jak vstupní signál  $y$ , tak chyba  $\eta$ , vznikající při jeho měření, jakož i rušivá složka  $v$  výstupního signálu všechny vzájemně nekorelované, tj. platí-li

$$(9) \quad R_{y\eta}(t) = R_{yv}(t) = R_{\eta v}(t) = 0,$$

336 lze rovnici (8) přepsat na

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yy}(t-t_2) [h(t_2) - g(t_2)] dt_2 + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\eta}(t-t_2) g(t_2) dt_2 = 0,$$

protože platí

$$(11) \quad R_{y\eta}(t) = R_{y\eta}(t) + R_{\eta\eta}(t),$$

$$(12) \quad R_{yv}(t) = R_{yv}(t) + R_{\eta v}(t).$$

Z rovnice (10) by bylo možno určit rozdíl  $h(t) - g(t)$  ze známé autokorelační funkce  $R_{\eta\eta}(t)$  chyb měření signálu  $y$  exaktně. V praxi bývá zpravidla  $\eta$  daleko menší než měřená veličina  $y$ . Platí proto

$$R_{\eta\eta}(0) \ll R_{yy}(0).$$

Např. je-li hladina chyb níže než  $1/10$  měřeného signálu, bude  $R_{\eta\eta}(0)$  menší než  $1/100$   $R_{yy}(0)$ .

Kdyby funkce  $R_{\eta\eta}(t)$  a  $R_{yy}(t)$  měly shodný tvar, tj. kdyby platilo

$$(13) \quad \frac{R_{\eta\eta}(t)}{R_{\eta\eta}(0)} = \frac{R_{yy}(t)}{R_{yy}(0)},$$

bylo by řešení rovnice (10)

$$(14) \quad g(t) - h(t) = \frac{R_{\eta\eta}(0)}{R_{yy}(0)} g(t).$$

Náhodné chyby měření  $\eta$  v blízkých časových okamžicích bývají téměř nezávislé, což platí zejména pro vzorkovací metody měření. Tato skutečnost se odráží na rychlém poklesu autokorelační funkce  $R_{\eta\eta}(t)$ , jež ubývá zpravidla daleko rychleji než funkce  $R_{yy}(t)$ . Rozdíl  $|g(t) - h(t)|$  vychází proto z rovnice (10) ještě podstatně menší než podle vztahu (14) a pro praktické účely lze tedy klást  $h(t) = g(t)$ .

### 3. DOSAVADNÍ ZPŮSOBY NUMERICKÉHO ŘEŠENÍ ROVNICE (5)

Dříve než přistoupíme k odvození nové metody numerického řešení Wienerovy - Hopfovy rovnice (5), naznačíme dosavadní přístup k tomuto problému a ukážeme jeho nedostatky.

Integrální rovnice typu (5) se numericky řeší zpravidla tak, že se integrál přibližně vyjádří jako součet diskretních hodnot integrandu a úloha se tak převede na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

Použijeme-li např. lichoběžníkového pravidla a označíme-li

$$(15) \quad \begin{aligned} R_{\bar{y}\bar{y}}(kT) &= c_k, \\ h_0(kT) &= h_k, \quad k > 0, \\ \frac{1}{2}h(0) &= h_0, \\ TR_{\bar{y}\bar{y}}(kT) &= a_k, \end{aligned}$$

přejde integrální rovnice (5) na algebraický vztah

$$(16) \quad c_k - \sum_{i=0}^{\infty} h_i a_{k-i} = 0, \quad k \geq 0.$$

Rozepíšeme-li tento vztah pro různá  $k \geq 0$ , dostaneme systém lineárních algebraických rovnic pro diskrétní hodnoty hledané váhové funkce  $h_i$ . Teoreticky bychom potřebovali nekonečně rovnic pro nekonečně mnoho neznámých  $h_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Protože však pro dostatečně velké  $N$  je u stabilní soustavy  $h_i \approx 0$  při  $i > N$ , vystačíme s konečným počtem rovnic, odhadneme-li správně  $N$ . V maticovém zápisu je

$$(17) \quad [c] - [a][h] = 0,$$

kde

$$(18) \quad [c] = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad [h] = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}$$

a matice  $[a]$  je symetrická, jelikož  $a_k = a_{-k}$ , a má stejné prvky na rovnoběžkách s hlavní diagonálou:

$$(19) \quad [a] = \begin{bmatrix} a_0 a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ a_1 a_0 & a_1 & \dots & a_{N-1} \\ a_2 a_1 & a_0 & \dots & a_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_N a_{-N-1} a_{N-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix},$$

Soustava rovnic (17) se pak řeší běžnými metodami buď finitními (není-li řád matice  $[a]$  příliš vysoký) nebo iteračními.

Popsaný postup má následující nevýhody: Má-li být náhrada integrálu v rovnici (5) součtem diskrétních hodnot integrandu vyhovující, je třeba volit interval  $T$  dostatečně malý. Při malém  $T$  však velmi narůstá řád matice  $[a]$  a mimo to se prvky v sousedních řádcích jen málo liší, matice se stává špatně podmíněnou.

Použití finitních metod pro řešení soustavy algebraických rovnic v takovém případě naráží na známé potíže s odečítáním velkých čísel sobě blízkých a iterační me-

tody konvergují špatně a zhusta\* nekonvergují vůbec. Zvolíme-li velký interval  $T$ , abychom se těmto obtížím vyhnuli, bude zase náhrada integrálu v rovnici (5) méně dobrá. Volba vhodného kompromisu je záležitost nesnadná a výsledek výpočtu je zpravidla nejistý.

V následujícím odstavci odvodíme metodu, která se z tohoto hlediska jeví výhodnější.

#### 4. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ WIENEROVY - HOPFOVY ROVNICE POMOČÍ OBOUSTRANNÉ TRANSFORMACE Z

Oboustranná transformace, kterou budeme dále používat, je funkcionální transformace posloupností a definujeme ji vztahem\*\*

$$(20) \quad F(z) = Z\{f_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^k,$$

kde  $f_k$  jsou jednotlivé členy zobrazené posloupnosti  $\{f_k\}$  a funkce  $F(z)$  komplexní proměnné  $z$  je jejím  $z$ -obrazem. Posloupnost  $\{f_k\}$  je zobrazitelná, jestliže v rovině  $z$  existuje mezikruží  $r < |z| < R$ , ve kterém řada (20) konverguje. Obráceně: pro daný obraz  $F(z)$  lze řadu (20) chápat jako jeho rozvoj v Laurentovu řadu ve zmíněném mezikruží se středem  $s = 0$ . Této okolnosti použijeme při zpětné transformaci, tj. při určení koeficientu  $f_k$  k dané funkci  $F(z)$ .

Při numerickém řešení Wienerovy - Hopfovy integrální rovnice (5) vyjdeme opět z její diskretní náhrady (16)

$$(21) \quad c_k - \sum_{i=0}^{\infty} h_i a_{k-i} = 0, \quad k \geq 0$$

a předpokládejme, že integrační krok  $T$  byl zvolen dostatečně malý, aby tato náhrada byla vyhovující. Aby bylo možno na rovnici (21) aplikovat oboustrannou transformaci  $Z$ , je třeba ji upravit tak, aby platila pro všechna  $k$ , tedy i  $k < 0$ . Toho docílíme snadno tím, že místo nuly na pravé straně budeme dosazovat členy posloupnosti  $\{d_k\}$ , která splňuje podmínku

$$(22) \quad d_k = 0 \quad \text{pro} \quad k \geq 0.$$

Členy této posloupnosti pro  $k < 0$  ponechme zatím neurčeny. Touto úpravou přejde vztah (21) do tvaru

$$(23) \quad c_k - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i a_{k-i} = d_k.$$

\* Byla-li autokorelační funkce stanovena s určitou chybou, kterou nelze nikdy vyloučit.

\*\* Jednostranná transformace  $Z$ , tj. transformace posloupností hodnot  $f_k$  pouze pro  $k \geq 0$ , bývá obvykle definována v záporných mocninách  $z^{-k}$ . My se zde přidržíme definice oboustranné transformace  $Z$  (20) v kladných mocninách  $z^k$  pro  $k > 0$ , protože nám to umožní převzít beze změny teorii Laurentových řad, která je bohatě propracována.



Interval sečítání podle indexu  $i$  jsme rovněž rozšířili i na záporné hodnoty tohoto indexu a podmínku realizovatelnosti

$$(24) \quad h_i = 0 \quad \text{pro} \quad i < 0$$

budeme respektovat na jiném místě.

Vynásobme nyní vztah (23), platný pro každé  $k$ , mocninou  $z^k$  a sečtěme takto vzniklé rovnice pro všechna kladná i záporná  $k$

$$(25) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i a_{k-i} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k.$$

Prvý člen na levé straně a pravá strana rovnice jsou zřejmě Z-obrazy posloupnosti  $\{c_k\}$  a  $\{d_k\}$

$$(26) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = C(z),$$

$$(27) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k = D(z).$$

Zbývající prostřední člen rovnice (25) upravíme změnou pořadí ve sečítání a substituicí  $k - i = j$  následovně:

$$(28) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i a_{k-i} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k-i} z^k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i z^i \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j = \\ = H(z) A(z),$$

kde  $H(z)$  je oboustranný Z-obraz hledané posloupnosti hodnot váhové funkce  $\{h_i\}$  a podobně  $A(z)$  je obraz posloupnosti hodnot autokorelační funkce vstupního signálu  $\{a_j\}$ .

Předpokládejme, že řady ve vztazích (26), (27) a (28) konvergují pro  $|z| = 1$ , tj. že jednotková kružnice patří do mezikruží jejich konvergence. Korelační funkce a váhové funkce stabilních soustav, které přicházejí v našem případě v úvahu, tento předpoklad splňují.

Dosažením (26), (27) a (28) do (25) dostáváme

$$(29) \quad C(z) - H(z) A(z) = D(z)$$

a odtud vypočteme

$$(30) \quad H(z) = \frac{C(z) - D(z)}{A(z)}.$$

Nyní je třeba provést zpětnou transformaci obrazu  $H(z)$ , tj. rozvinout jej v Laurentovu řadu pro okolí jednotkové kružnice

$$(31) \quad H(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i z^i.$$

340 Přitom musíme zajistit podmínku realizovatelnosti  $h_k = 0$  pro  $k < 0$ . Hlavní část Laurentovy řady (31) musí být tedy rovna nule, což znamená, že funkce  $H(z)$  musí být uvnitř jednotkové kružnice regulární. Plyne to i z obecného výrazu pro koeficienty Laurentovy řady

$$(32) \quad h_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H(z) \frac{dz}{z^{k+1}},$$

kteřý bude roven nule pro  $k < 0$ , bude-li  $H(z)$  regulární v oblasti ohraničené integrační cestou.

Ukážeme, jakým způsobem je možno tuto podmínku regularity zajistit. V praktických případech bude mít Laurentova řada obrazu  $A(z)$  vždy pouze konečný počet členů

$$(33) \quad A(z) = \sum_{k=-N}^N a_k z^k.$$

Vyplývá to ze skutečnosti, že autokorelační funkce  $R_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tau)$  získaná vyhodnocením změřeného průběhu náhodného neperiodického vstupního signálu  $\tilde{y}(t)$ , klesá k nule pro dostatečně velké  $\tau$  a hodnoty  $a_k = T R_{\tilde{y}\tilde{y}}(kT)$  budou pro  $k > N$  nulové, nebo budou tak malé, že nebudou ani zjištělné.

Autokorelační funkce  $R_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tau)$  je vždy funkcí sudou  $R_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tau) = R_{\tilde{y}\tilde{y}}(-\tau)$  a z toho vyplývá i symetrie koeficientů  $a_k = a_{-k}$ . V důsledku této symetrie bude mít obraz  $A(z)$  (33)  $N$  párů nulových bodů navzájem reciprokových, tj. bude mít  $N$  nulových bodů  $z_v$  ( $v = 1, 2, \dots, N$ ) vně jednotkové kružnice a zároveň  $N$  nulových bodů  $1/z_v$  uvnitř jednotkové kružnice. Nulové body obrazu  $A(z)$  jsou podle (30) zároveň póly obrazu  $H(z)$ . Ke splnění podmínky realizovatelnosti (regularity  $H(z)$ ) uvnitř jednotkové kružnice je třeba všechny nulové body  $A(z)$  uvnitř jednotkové kružnice odstranit. Za tímto účelem rozložíme obraz  $A(z)$  na součin dvou výrazů

$$(34) \quad A(z) = A^+(z) \cdot A^-(z),$$

kde  $A^+(z)$  je polynom v kladných mocninách  $z$  a má všechny kořeny vně jednotkové kružnice,

$$(35) \quad A^+(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_N z^N = \alpha_N \prod_{v=1}^{v=N} (z - z_v),$$

$$|z_v| < 1,$$

a  $A^-(z)$  je polynom v záporných mocninách  $z$  s týmiž koeficienty

$$(36) \quad A^-(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_N z^{-N} = \alpha_N \prod_{v=1}^N (z^{-1} - z_v),$$

a má tedy všechny nulové body v rovině  $z$  uvnitř jednotkové kružnice.\*

\* Není bez zájmovosti poukázat na fyzikální interpretaci rozkladu autokorelační funkce (34). Podle (34) je  $A(z)$  autokorelační funkcí časového průběhu, jehož obraz je polynom  $A^+(z)$ . Sum,

Použijeme-li rozkladu (34), můžeme výrazy (30) pro obrazy hledané váhové funkce  $H(z)$  psát ve tvaru

$$(37) \quad H(z) = \frac{B(z)}{A^+(z)},$$

kde

$$(38) \quad B(z) = \frac{C(z) - D(z)}{A^-(z)}.$$

Je zřejmé, že funkce  $H(z)$  bude uvnitř jednotkové kružnice regulární, bude-li tam regulární  $B(z)$ . Laurentovu řadu pro  $B(z)$  můžeme rozdělit na část hlavní a normální

$$(39) \quad B(z) = B_-(z) + B_+(z),$$

kde

$$(40) \quad B_-(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{-j} z^{-j}$$

je část hlavní a

$$(41) \quad B_+(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j$$

je část normální. Aby byla funkce  $B(z)$  uvnitř jednotkové kružnice regulární, musí být všechny koeficienty hlavní části jejího Laurentova rozvoje rovny nule

$$(42) \quad b_{-j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Pro splnění této podmínky máme k dispozici koeficienty hlavní části Laurentovy řady pro  $D(z)$ , tj. členy zavedené posloupnosti  $\{d_k\}$ , které jsme dosud ponechávali neurčeny.

Konečný tvar obrazu posloupnosti diskretních hodnot hledané váhové funkce bude tedy

$$(43) \quad H(z) = \frac{B_+(z)}{A^+(z)},$$

ze kterého byla autokorelační funkce vypočtena, má tedy tentýž průběh spektrální hustoty jako časový průběh, přiřazený polynomu  $A^+(z)$ . Představme si, že náš šum vzniká z bílého šumu průchodem přes nějaký filtr. Bude-li na vstupu tohoto filtru deterministický časový průběh, odpovídající v originále polynomu  $A^+(z)$ , pak na vstupu tohoto filtru musí být deterministický signál stejného spektrálního složení jako má bílý šum, tj. např. Diracův impuls. Je tedy  $A^+(z)$  obraz impulsní odezvy filtru, který při bílém šumu na vstupu má na výstupu šum s autokorelační funkcí  $A(z)$ .

Vzorec (43) uzavírá teoretické řešení Wienerovy - Hopfovy rovnice pomocí transformace  $Z$ .

Při numerickém výpočtu podle tohoto postupu musíme především rozložit polynom  $A(z)$  podle (34). Protože při dostatečně jemném vyjádření korelační funkce diskrétními hodnotami budeme mít co činit s polynomy  $A(z)$  stého a vyšších stupňů, je cesta přes rozklad  $A(z)$  na kořenové činitele vhodná pouze pro teoretickou úvahu.

Proto zde uvádíme iterační metodu, která podle našich dosavadních experimentálních zkušeností umožňuje dosáhnout cíle bez nalezení kořenových činitelů.

Metoda vychází z rovnice (34), upravené po zavedení polynomů

$$(44) \quad \left. \begin{aligned} \overline{A^+}(z) &= \frac{1}{\alpha_0} A^+(z) = \sum_{v=0}^N \overline{\alpha}_v z^v, \\ \overline{A^-}(z) &= \frac{1}{\alpha_0} A^-(z) = \sum_{v=0}^N \overline{\alpha}_v z^{-v}, \end{aligned} \right\}$$

kde

$$(45) \quad \overline{\alpha}_v = \frac{\alpha_v}{\alpha_0}; \quad \overline{\alpha}_0 = 1,$$

do tvaru

$$(46) \quad \overline{A^+}(z) = \frac{A(z)}{A^-(z)} \frac{1}{\alpha_0^2}.$$

Prvým krokem iterační metody je stanovení výchozího odhadu pro hledané řešení  $\overline{A^+}(z)$ .

V praxi se osvědčily jednoduché odhady

$$(47) \quad \overline{A_0^+}(z) = 1$$

a lepší

$$(48) \quad \overline{A_0^+}(z) = \sum_{v=0}^N z^v.$$

Z prvního odhadu stanovíme postupně jednotlivá další přiblížení vždy podle téhož algoritmu.

Vycházíme přitom z přiblížení  $i$ -tého (pro první odhad  $i = 0$ ), jehož výsledkem byla posloupnost koeficientů  $\overline{\alpha}_{v,i}$  určující polynomy

$$(49) \quad \left. \begin{aligned} \overline{A_i^+}(z) &= \sum_{v=0}^N \overline{\alpha}_{v,i} z^v, \\ \overline{A_i^-}(z) &= \sum_{v=0}^N \overline{\alpha}_{v,i} z^{-v}. \end{aligned} \right\}$$

Nejprve dělíme polynom  $A(z)$  polynomem  $\overline{A_i^-}(z)$  postupem známým z elementární algebry. Oba polynomy přitom srovnáváme podle klesajících mocnin, tj. dělíme:

$$(50) \quad (a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_{-N} z^{-N}) : (1 + \overline{\alpha_1} z^{-1} + \dots + \overline{\alpha_N} z^{-N}) = \\ = \overline{\gamma_N} z^N + \overline{\gamma_{N-1}} + \dots + \overline{\gamma_0} + \dots$$

Toto dělení lze popsat rekurentním vzorcem

$$(51) \quad \overline{\gamma_{N-k}} = a_{N-k} - \sum_{v=0}^{k-1} \overline{\gamma_{N-v}} \overline{\alpha_{k-v}}.$$

Pro určení koeficientů  $\overline{\alpha_v}$  dalšího přiblížení  $\overline{A_{i+1}^-}(z)$  použijeme pouze prvních  $N+1$  hodnot  $\overline{\gamma_v}$ , takže členy  $A(z)$  se zápornými mocninami  $z$  se při dělení neuplatňují:

$$(52) \quad \overline{\alpha_v} = \frac{\overline{\gamma_v}}{\overline{\gamma_0}}.$$

Konvergenci iterace lze urychlit volbou méně triviálních algoritmů pro určení dalšího přiblížení, jako např. algoritmů, vycházejících z lineární kombinace  $m$  předchozích přiblížení:

$$(53) \quad \overline{\alpha_v} = \sum_{k=1}^m \varrho_k \overline{\alpha_v}^{(k)} + \left(1 - \sum_{k=1}^m \varrho_k\right) \overline{\alpha_v}^{(0)}.$$

Podstatné urychlení přináší zpravidla již algoritmus s  $m=1$ . Optimální  $\varrho_1$  ležívá v oblasti 0 až  $-1$ .

Účelnost ještě složitějších algoritmů pro určení dalšího přiblížení, jako jsou např. algoritmy, uvažující pro určení  $\overline{\alpha_v}$  i hodnoty sousedních koeficientů  $\overline{\alpha_{v+j}}$  až  $\overline{\alpha_{v-j}}$ , nebo algoritmů, využívajících znalosti zbytku dělení, jsme dosud neprověřovali.

Iterační postup ukončíme, jakmile dospějeme k dostatečné shodě dvou (nebo několika) po sobě následujících přiblížení  $\overline{A_i^-}(z)$  resp. k dostatečné shodě součinu  $\overline{\alpha_0} \overline{A_i^+}(z) \overline{A_i^-}(z)$  s výchozím polynomem  $A(z)$ , přičemž  $\alpha_0$  určíme z požadavku shody absolutních členů:

$$(54) \quad \alpha_0^2 = \frac{a_0}{\sum_{v=0}^N \overline{\alpha_v}^2}.$$

Po nalezení rozkladu  $A(z)$  je již další postup snadný. Nejprve v souladu s (38) až (42) určíme  $B_+(z)$  dělením polynomu  $C(z)$  polynomem  $A^-(z)$ :

$$344 \quad (55) \quad (c_M z^M + c_{M-1} z^{M-1} + \dots + c_0) : (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_N z^{-N}) = \\ = b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \dots + b_0 + \Delta = B_+(z) + \Delta,$$

$$(56) \quad \alpha_0 b_{M-k} = c_{M-k} - \sum_{v=0}^{k-1} b_{M-v} \alpha_{k-v}.$$

Zde  $M$  značí počet členů řady vyjadřující  $B_+(z)$ .

Záporné mocniny  $z$ , obsažené v  $\Delta$ , by patřily k polynomu  $B_-(z)$ , který nepotřebujeme. Proto ani v dělení neuvažujeme koeficienty se zápornými mocninami  $z$ , tj. hodnoty vzájemně korelační funkce pro záporný čas, jak to odpovídá závěrům odstavce 2.

Konečný výsledek  $H(z)$  obdržíme podle (43) opět prostým dělením polynomu  $B_+(z)$  polynomem  $A^+(z)$ , avšak s uspořádáním podle rostoucích mocnin

$$(57) \quad (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_M z^M) : (\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_N z^N) = \\ h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots,$$

$$(58) \quad \alpha_0 h_k = b_k - \sum_{v=0}^{k-1} h_v \alpha_{k-v},$$

čímž je řešení ukončeno.

Stabilita numerických výpočtů podle rovnic (55) až (58) je zajištěna tím, že podle (34) a (35) všechny kořeny  $A^+(z)$  leží vně a všechny kořeny  $A^-(z)$  uvnitř jednotkové kružnice. Chyby vzniklé zaokrouhlováním čísel se neakumulují a doznívají tím rychleji, čím dále od jednotkové kružnice zmíněné kořeny leží.

Důkaz a přesné vymezení oblasti konvergence iterační metody se zatím v obecné formě nepodařilo najít. Řešení iteračního postupu vede na nelineární diferenční rovnice, jak se lze přesvědčit z triviálního případu

$$(59) \quad A(z) = z^{-1} + a_0 + z,$$

u něž při použití (52) plyne z (51) vztah

$$(60) \quad \bar{\alpha}_1 = \frac{1}{a_0 - i^{-1} \bar{\alpha}_1},$$

který představuje nelineární diferenční rovnici pro  $\bar{\alpha}_1$  druhého řádu. Její řešení lze pro  ${}^0 \bar{\alpha}_1$  volené v soulasu s (48)

$$(61) \quad {}^0 \bar{\alpha}_1 = 1$$

zapsat ve formě řetězového zlomku

$$(62) \quad \bar{\alpha}_i = \frac{1}{a_0 - \frac{1}{a_0 - \frac{1}{a_0 - \frac{1}{a_0 - \frac{1}{a_0 - \frac{1}{\ddots}}}}}}} \quad i \text{ zlomkových čar}$$

z níž je patrná konvergence pro  $a_0 > 2$ .

Experimentálně byla konvergence prověřena na nejčastěji se vyskytujících tvarech autokorelačních funkcí. Výsledky těchto prací budou publikovány ve zvláštní stati. Ve stručnosti lze říci, že rozklad tvarů „špičatých“, jako např.

$$(63) \quad R(\tau) = e^{-|\tau|}$$

konverguje podstatně lépe než rozklad tvarů v okolí počátku „oblých“, jako např.

$$(64) \quad R(\tau) = e^{-\tau^2},$$

u nichž může nastat divergence, není-li  $N$  zvoleno tak, aby koeficienty  $\alpha_v$  pro  $v > N$  byly dostatečně malé. Počet iterací pro dosažení potřebné přesnosti rozkladu (tj. takové, že rozdílový polynom

$$(65) \quad A_d(z) = \alpha_0^2 A_i^-(z) A_i^+(z) - A(z)$$

má všechny koeficienty menší než  $1/1000 a_0$ ) se pohybuje nejčastěji v mezích 2 – 20.

(Došlo dne 27. září 1965.)

#### LITERATURA

- [1] Goodman T. P., Reswick J. B.: Determination of System Characteristics from Normal Operating Records. Transactions of ASME (Feb. 1956), 259–271.
- [2] Chang C. M., Goodman T. P., Reswick J. B.: Use of Correlation Functions to Determine System Characteristics without Applying Artificial Disturbances. Internationale Konferenz über Regelungstechnik, Heidelberg 1956, 251–256.
- [3] Леонов Ю. П.: О приближенном методе синтеза оптимальных линейных систем для выделения полезного сигнала из шума. Автоматика и телемеханика XIX (1958), № 8.
- [4] Леонов Ю. П., Липатов Л. Ю.: Применение статистических методов для определения характеристик объектов. Автоматика и телемеханика XX (1959), № 9, 1289–1301.
- [5] Леонов Ю. П., Липатов Л. Ю.: Статистические методы определения динамических характеристик промышленных объектов при наличии шумов и анализ инфрочастотных случайных процессов. Автоматика и телемеханика XXI (1960), № 2, 180–190.
- [6] Леонов Ю. П., Липатов Л. Ю.: Практический метод оценки оператора связи. Автоматика и телемеханика XXII (1961), № 5, 561–570.
- [7] Солодовников В. В., Усков А. С.: Статистический анализ объектов регулирования. Машгиз, Москва 1960.

- [8] Westcott J. H.: The Determination of Process Dynamics from Normal Disturbance Records of Controlled Process. *Regelungstechnik — Moderne Theorien und ihre Verwendbarkeit* (Kongress v Heidelbergu 1956). Oldenbourg 1957, 256–261.
- [9] Werner G. W.: Zur statistischen Analyse von Regelstrecken. *Messen, Steuern, Regeln, Automatisierung* (1962), 261–266.
- [10] Beneš J.: *Statistická dynamika regulačních obvodů SNTL*, Praha 1961.
- [11] Солодовников В. В.: Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. Москва—Ленинград 1952.
- [12] Пугачев В. С.: Теория случайных функций и ее применение в задачах автоматического управления. Госполиздат, Москва 1957.
- [13] Newton G. C., Gould L. A., Kaiser J. F.: *Analytical Design of Linear Feedback Controls*. New York 1957.

---

SUMMARY

### Numerical Solution of the Wiener-Hopf Equation in Statistical Identification of a Linear Dynamic Plant

ANNA FOŘTOVÁ, JIŘÍ KRÝŽE, VÁCLAV PETERKA

If a steady-state random input signal  $y$  acts on a linear dynamic plant, and if a steady-state noise, noncorrelated with the input signal, is superimposed on the output signal  $x$ , it is possible to determine an unknown weight function of a plant  $h(\tau)$  by solving the Wiener - Hopf equation

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^{\infty} h(\vartheta) R_{yy}(\tau - \vartheta) d\vartheta, \quad \tau \geq 0,$$

where  $R_{yy}(\tau)$  is the auto-correlation function of the input signal, and  $R_{yx}(\tau)$  is the cross-correlation function of the output and input signal of the plant. If the correlation functions are given graphically or tabularly, the above equation is solved numerically. Existing methods of solving this problem use an approximate substitution of a system of linear algebraic equations for the integral equation, the former being solved by finitary or iterative methods. This procedure presents some difficulties (badly conditioned system of linear equations, and the like). The authors propose therefore another approach to the solution of this problem. The new method of a numerical solution of the Wiener - Hopf equation described in this paper is based on a two-sided  $z$ -transform, and all numerical operations used therein have the character of a division of two polynomials.

*Ing. Anna Fořtová, Ing. Jiří Krýže, CSc., Ing. Václav Peterka, CSc., Ústav teorie informace a automatizace, Vítězská 49, Praha 2.*