KYBERNETIKA ČÍSLO 4, ROČNÍK 2/1966

O analýze neiniciálnych automatov

JÁN ČERNÝ

V článku se študuje predstavovanie udalostí neiniciálnymi konečnými automatmi. Aby tento pojem získal netriviálny obsah, zúžuje sa množina prípustných slov. Popisuje sa algoritmus, pomocou ktorého sa k danému automatu a k danému systému podmnožín jeho množiny stavov určujú udalosti, nimi predstavené na maximálnej možnej prípustnej množine slov.

V teórii iniciálnych konečných automatov sa často venuje pozornosť predstavovaniu udalostí v nejakej abecede množinami niektorých stavov konečného automatu, alebo jeho výstupov. Táto problematika je podrobne rozobraná v knihe [1]. Pojmy, zavedené v tejto knihe, budeme považovať za známe.

Uvažujme teraz neiniciálny automat $\mathbf{M}$ Mooreovho typu. Na prvý pohľad by sa zdalo, že definíciu predstaviteľnosti udalosti S v automate $\mathbf{M}$ pomocou množiny stavov E by sme mohli celkom analogicky s iniciálnym prípadom vysloviť tak, že

1. ak $p \in S$, prejde $\mathbf{M}$ vlivom vstupného slova p do stavu z množiny E, bez ohľadu na počiatočný stav,

2. ak $p \notin S$, prejde $\mathbf{M}$ po slove p do stavu, nepatriaceho do E, zasa bez ohľadu na počiatočný stav.

Žiaľ, takáto definícia je prakticky nepoužiteľná, pretože, ako je ukázané v [2], predstaviteľnosť sa zúži len na niektoré celkom triviálne prípady. Príčina tkvie v tom, že pre netriviálne prípady udalostí nie je možné splniť podmienku 2. V ďalšom si ukážeme, že ak túto podmienku obmedzíme len na istú množinu prípustných slov, bude možné uvažovať i o predstavovaní netriviálnych udalostí pomocou neiniciálnych automatov.

Budeme hovoriť, že konečný automat $\mathbf{M} = (A, X, f)$, kde A je *množina stavov*, X *množina vstupov* a f *prechodové zobrazenie*, *predstavuje* udalosti $S_1, \ldots, S_n$ na udalosti S pomocou množín $A_1, \ldots, A_n$, ak

1. $S_i \subset S$, $A_i \subset A$ pre všetky $i = 1, \ldots, n$,
2. pri ľubovoľnom i pre všetky $p \in S_i$, $a \in A$ platí

$$f(a, p) \in A_i ,$$

3. pri ľubovoľnom i pre všetky $p \in S - S_i$, $a \in A$ platí

$$f(a, p) \notin A_i .$$

Ak by sme za S brali množinu všetkých vstupných slov dĺžky aspoň k, dostali by sme prípad k-predstaviteľnosti, ktorý študoval Starke v práci [2].

Základnou úlohou analýzy pre neiniciálny konečný automat $\mathbf{M} = (A, X, f)$ a množiny $A_1, \ldots, A_n$, $A_i \subset A$, budeme nazývať úlohu nájsť udalosti $S_1, \ldots, S_n$, S v abecede X, také, aby

a) $\mathbf{M}$ predstavovalo S_i na S pomocou A_i, pre všetky $i = 1, \ldots, n$,

b) S je maximálne v tom zmysle, že ak $\mathbf{M}$ reprezentuje aj udalosti R_i na R pomocou A_i, $i = 1, \ldots, n$, potom $R \subset S$ (z čoho už zrejme plynie, že $R_i = S_i \cap R$, pretože $R_i \subset R \subset S$).

Pri riešení tejto úlohy nám pomôže zavedenie pojmu *totálneho iniciálneho automatu* $\overline{\mathbf{M}} = (\bar{A}, X, \bar{f})$, *príslušného k automatu* $\mathbf{M}$. $\overline{\mathbf{M}}$ budeme tak nazývať, ak

I. $\bar{A}$ je systém všetkých neprázdnych podmnožín množiny A,

II. pre všetky $E \in \bar{A}$ a všetky slová p v abecede X je

$$\bar{f}(E, p) = \{f(a, p) : a \in E\} ,$$

III. počiatočným stavom automatu $\overline{\mathbf{M}}$ je A.

Nasledujúca veta nám dá algoritmus pre riešenie základnej úlohy analýzy v prípade, ak množiny A_i sú navzájom dizjunktné.

Veta 1. *Nech $\mathbf{M} = (A, X, f)$ je daný automat a nech $\overline{\mathbf{M}}$ je k nemu definovaný ako vyše. Nech $A_i \subset A$, $i = 1, \ldots, n$ a nech $A_i \cap A_j = \emptyset$ ak $i \neq j$. Nech S_i je predstavovaná v $\overline{\mathbf{M}}$ množinou tých stavov $E \in \bar{A}$, pre ktoré platí $E \subset A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Nech S' je udalosť, predstavená v $\overline{\mathbf{M}}$ množinou tých $E \in \bar{A}$, pre ktoré platí $E \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$. Nech $S = S' \cup \bigcup_{i=1}^{n} S_i$.*

Potom $S_1, \ldots, S_n, S$ sú riešením základnej úlohy analýzy pre $\mathbf{M}$, $A_1, \ldots, A_n$.

Dôkaz. Nech $p \in S_i \Rightarrow \bar{f}(A, p) \subset A_i \Rightarrow$ pre všetky $a \in A$ je $f(a, p) \in A_i$. Nech naopak $p \in S - S_i \Rightarrow \bar{f}(A, p) \cap A_i = \emptyset \Rightarrow$ pre všetky $a \in A$ je $f(a, p) \notin A_i$. Vidíme teda, že $\mathbf{M}$ predstavuje $S_1, \ldots, S_n$ na S pomocou $A_1, \ldots, A_n$. Nech teraz $\mathbf{M}$ predstavuje aj nejaké $R_1, \ldots, R_n$ na nejakom R pomocou $A_1, \ldots, A_n$ a nech $p \notin S$. Potom pre žiadne i nemôže platiť $\bar{f}(A, p) \subset A_i$, ani $\bar{f}(A, p) \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$ a teda musia existovať také i, a, b, že $f(a, p) \in A_i$, $f(b, p) \notin A_i$. Z toho však už plynie, že $p \notin R$ a teda $R \subset S$, čím je veta dokázaná.

Uvažujme teraz množiny $A_i \subset A$, $i = 1, \ldots, n$, nie však nutne dizjunktné. Nech pre všetky $h = 1, \ldots, n$ a všetky kombinácie $(i_1, \ldots, i_h)$ je $B(i_1, \ldots, i_h)$ množina všetkých $a \in A$, ktoré patria do $A_{i_1}, \ldots, A_{i_h}$ a nepatria do ostatných A_i. Systém $\bar{B}$ všetkých týchto množín $B(\ldots)$ budeme nazývať rozkladom systému $\{A_1, \ldots, A_n\}$. $\bar{B}$ je zrejme dizjunktný systém, ktorého zjednotenie sa rovná zjednoteniu systému $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Veta 2. *Nech* $\mathbf{M} = (A, X, f)$ *je daný konečný automat a nech* $\overline{\mathbf{M}}$ *je totálny automat k nemu príslušný. Nech* $A_i \subset A$, $i = 1, \ldots, n$ *a nech* $\bar{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ *je rozklad systému* $\{A_1, \ldots, A_n\}$. *Nech* $T_1, \ldots, T_m$, T *je riešenie základnej úlohy analýzy pre* $M, B_1, \ldots, B_m$. *Nech* $S = T$, $S_i = \bigcup_{j \in J_i} T_j$, *kde* $J_i = \{j : B_j \subset A_i\}$.

Potom $S_1, \ldots, S_n$, S *tvoria riešenie základnej úlohy analýzy pre* $\mathbf{M}$, $A_1, \ldots, A_n$.

Dôkaz. Zrejme platí, že $\mathbf{M}$ predstavuje $S_1, \ldots, S_n$ na S pomocou $A_1, \ldots, A_n$. Nech by $\mathbf{M}$ predstavovalo aj $R_1, \ldots, R_n$ na R a nech $p \notin S = T$. Potom existujú $a, b \in A$ a číslo i také, že $f(a, p) \in B_i$, $f(b, p) \notin B_i$. Teraz máme dve možnosti:

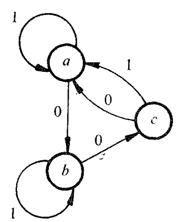
1. $f(b, p) \in B_j \neq B_i$; z konštrukcie systému $\bar{B}$ však potom plynie, že nutne musí existovať také A_k, že $f(a, p) \in A_k$, $f(b, p) \notin A_k$.

2. $f(b, p) \notin \bigcup_{i=1}^{m} B_i = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$.

V oboch prípadoch je vylúčené, aby mohlo platiť $p \in R$, pričom $\mathbf{M}$ by predstavoval $R_1, \ldots, R_n$ na R pomocou $A_1, \ldots, A_n$. Tým je veta dokázaná.

Z viet 1 a 2 vyplýva následovný *algoritmus na riešenie základnej úlohy* analýzy neiniciálnych konečných automatov:

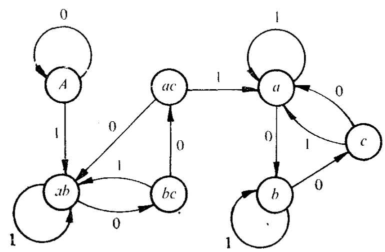
1. K $\mathbf{M}$ vytvoriť $\overline{\mathbf{M}}$,
2. k $\{A_1, \ldots, A_n\}$ vytvoriť $\{B_1, \ldots, B_m\}$,
3. vytvoriť systémy $\{E \in \bar{A} : E \cap \bigcup^{m} B_j = \emptyset\}$ a $\{E \in \bar{A} : E \subset B_j\}$, $j = 1, \ldots, m$,
4. k nim nájsť T' a T_j analýzou iniciálneho automatu $\overline{M}$ (podľa [1]),
5. vytvoriť udalosti S_i.



Obr. 1.

Príklad: Majme automat z obr. 1 (je to automat $\mathbf{U}_3$ z [3]). Riešme na ňom základnú úlohu analýzy pre $A_1 = \{a\}$!

1. Automat $\overline{\boldsymbol{M}}$ je na obr. 2.
2. $B_1 = A_1$.
3. Hľadané systémy sú $\{bc; c; b\}$ a $\{a\}$.
4. $T_1 = S_1 = \langle 0\rangle\, 1\langle 1 \vee 01 \vee 000\rangle\, 001\, \langle 0\langle 1\rangle\, 0(0 \vee 1) \vee 1\rangle$ a po príslušnej úprave $S = \langle 0\rangle\, 1\langle 1 \vee 01 \vee 000\rangle\, 0[e \vee 01\langle 0\langle 1\rangle\, 0(0 \vee 1) \vee 1\rangle\, (e \vee 0\langle 1\rangle\, (e \vee 0))]$, kde $\langle\,\rangle$ je znak operácie iderácie, kým ostatné zátvorky majú zmysel obyčajných zátvoriek.



Obr. 2.

Poznámka: 1. Základná úloha analýzy nie je vždy netriviálne riešiteľná (za netriviálne riešenie budeme považovať prípad $S \neq \emptyset$). Stačí uvážiť sčítací klopný obvod a jednobodovú množinu A_1.

2. Ak niektorá z množín A_i je jednobodová a základná úloha je netriviálne riešiteľná, je potom $\boldsymbol{M}$ nutne usmerniteľný v zmysle [3]. Ak sú všetky A_i viacbodové, nemusí toto tvrdenie zostať pravdivým.

(Došlo dňa 24. novembra 1965.)

LITERATÚRA

[1] В. М. Глушков: Синтез цифровых автоматов. Москва 1962.
[2] P. H. Starke: Über die Darstelbarkeit von Ereignissen in nichtinitialen Automaten. Zeitschr. f. math. Log. u. Grundl. der Math. *9* (1963), 315–319.
[3] J. Černý: Poznámka k homogénnym experimentom s konečnými automatmi. Mat.-fyz. čas. *14* (1964), 208–216.

On the Analysis of Non-initial Automata

JÁN ČERNÝ

The paper is connected with non-initial Moore's automata. If $\mathbf{M} = (A, X, f)$ is such the automaton (A is the set of states, X the set of inputs), if $A_i \subset A$, $i = 1, \ldots, n$, if S_i, S are the events in X, $S_i \subset S$ and if

1. for every $p \in S_i$ and $a \in A$ it is $f(a, p) \in A_i$,
2. $f(a, p) \in A - A_i$ for every $p \in S - S_i$ and $a \in A$ ($i = 1, \ldots, n$) then the automaton $\mathbf{M}$ is said to be representing the events S_i on S by means of A_i. If we are given $\mathbf{M}$ and A_i, then the problem of the analysis is to find such S_i and S, that

1. $\mathbf{M}$ represents S_i on S by A_i,
2. if $\mathbf{M}$ represent R_i on R by A_i, then $R \subset S$.

An algorithm for a solution of the problem is described.

Ján Černý, prom. mat., katedra matematiky prírodovedecké fakulty Univerzity P. J. Šáfárika, nám. Febr. víťazstva 9, Košice.