KYBERNETIKA ČÍSLO 2, ROČNÍK 2/1966

Náhodná střetnutí*

JAROSLAV KOŽEŠNÍK

V práci jsou řešeny dva problémy náhodných střetnutí při různých předpokladech o intenzitách ničení: Případ, kdy intenzity ničení jsou stálé, a případ, kdy intenzity ničení jsou proporcionální okamžitému stavu aktivních jednotek dvou stran. Byly stanoveny pravděpodobnosti okamžitých stavů, pravděpodobnosti výhry jedné či druhé strany jako funkce času, očekávané doby výhry a jiní ukazatelé. Probrané případy mohou sloužit jako jednoduché modely procesů ničení, s nimiž se setkáváme při různých formách biologického boje.

Pod pojmem střetnutí zde rozumíme zápas dvou protivníků, jenž končí zničením jednoho z nich. Vlastní proces ničení se považuje za náhodný. O intenzitě ničení se na obou stranách předpokládá, že závisí jistým způsobem na okamžitém počtu bojujících jednotek obou stran. Na počátku $(t = 0)$ má jeden z protivníků $\bar{n}$ a druhý $\bar{m}$ bojových jednotek. Tyto jednotky se mohou vzájemně lišit, jsou však u každého z protivníků jednoho druhu. Hlavním cílem výpočtu je stanovit pravděpodobnost

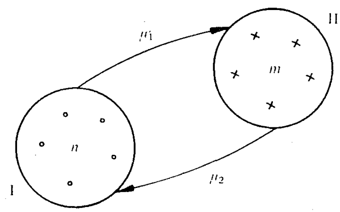
$$P(n, m, t),$$

že v čase t má prvý z protivníků n, druhý m aktivních jednotek. Podle toho jak závisí intenzity ničení na obou stranách na n a m, mohou nastat různé případy, které mohou sloužit jako modely různých náhodných střetnutí. Nemáme přitom na mysli bojové vojenské akce. Může jít o biologický boj v nejširším slova smyslu. Vlastní proces ničení obou protivníků se považuje za náhodný Markovův proces. Co je tím míněno, vyplyne z dalších úvah.

* Předneseno na *druhé konferenci o kybernetice*, která se konala v Praze ve dnech 16. až 19. listopadu 1965.

V dalším odvodíme základní rovnice pro výpočet pravděpodobnosti $P(n, m, t)$. Buď pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t + \Delta t)$ bude zničena jedna jednotka protivníka II (viz obr. 1):

$$\mu_1(n, m, t)\,\Delta t + o(\Delta t)\,. \tag{1}$$



Obr. 1.

Podobně u protivníka I:

$$\mu_2(n, m, t)\,\Delta t + o(\Delta t)\,. \tag{2}$$

Funkce $\mu_1(n, m, t)$ a $\mu_2(n, m, t)$ nazýváme *intenzity ničení.* Závisí na okamžitých stavech bojových jednotek obou protivníků v čase t, případně se mění i s časem.

Označíme-li v pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t + \Delta t)$ zůstává počet bojujících jednotek nezměněn, bude platit:

$$P(n, m, t + \Delta t) = P(n, m, t)\,v + P(n + 1, m, t)\,\mu_2(n + 1, m, t)\,\Delta t + \\ + P(n, m + 1, t)\,\mu_1(n, m + 1, t)\,\Delta t\,.$$

Protože

$$v + \mu_1(n, m, t)\,\Delta t + \mu_2(n, m, t)\,\Delta t = 1\,,$$

bude, přejdeme-li k limitě $\Delta t \to 0$:

$$\frac{\mathrm{d}P(n, m, t)}{\mathrm{d}t} = P(n + 1, m, t)\,\mu_2(n + 1, m, t) + P(n, m + 1, t)\,\mu_1(n, m + 1, t) - \\ - P(n, m, t)\left[\mu_2(n, m, t) + \mu_1(n, m, t)\right]. \tag{3}$$

To je základní rovnice pro výpočet pravděpodobnosti $P(n, m, t)$. K tomu je třeba dodat, že $P(\bar{n}, \bar{m}, 0) = 1$.

Dále je také

$$P(n, m, t) = 0$$

pro všechna $\bar{n} < n < 0$ a $\bar{m} < m < 0$. Plyne z pojetí úlohy, že také $P(0, 0, t) = 0$, což je způsobeno tím, že se předpokládá, že v elementárním intervalu $(t, t + \Delta t)$ může být zničena *jen jedna* jednotka na jedné nebo na druhé straně. Boj se končí, jestliže na jedné nebo na druhé straně byly zničeny všechny jednotky. „Prohrává" ten, jemuž nezbyly žádné aktivní jednotky.

Další postup při výpočtu $P(n, m, t)$ z rovnice (3) závisí na tvaru funkcí $\mu_1(n, m, t)$ a $\mu_2(n, m, t)$. Tvar těchto funkcí souvisí s povahou boje. Zásadně by měly být tyto funkce takové, že když počet aktivních jednotek klesne u jednoho z protivníků na nulu, nabývají *obě* funkce nulové hodnoty. Tedy

$$\mu_1(0, m, t) = 0 \; ; \quad \mu_1(n, 0, t) = 0 \; ; \tag{4a}$$

$$\mu_2(0, m, t) = 0 \; ; \quad \mu_2(n, 0, t) = 0 \, . \tag{4b}$$

Jsou-li funkce μ_1 a μ_2 takto voleny, zastaví se proces ničení automaticky po prohře jednoho z protivníků. Není cílem této práce zabývat se vhodností různých možných tvarů funkcí μ_1 a μ_2. Je však třeba poznamenat, že na nich závisí nejen adekvátnost modelu, nýbrž i stupeň obtížnosti výpočtu pravděpodobnosti $P(n, m, t)$. Zásadně je výpočet snadný při malých počátečních stavech jednotek $\bar{n}, \bar{m}$. Při velkém jejich počtu závisí obtížnost výpočtu také na tvaru funkcí μ_1 a μ_2. Výpočet je při velkých $\bar{n}, \bar{m}$ vždy pracný a proto se praxe často spokojuje deterministickým řešením [1]. Většina těchto řešení reprodukuje dosti dobře prvé fáze boje, pokud počet jednotek obou protivníků je značný. Schyluje-li se však boj ke konci, jsou odchylky deterministického řešení od skutečnost často i zásadní povahy.

V dalším pojednáme o několika druzích náhodných střetnutí, v nichž budou mít intenzity ničení $\mu_1(n, m, t)$ a $\mu_2(n, m, t)$ zvláštní tvar.

2. „KONSTANTNÍ" INTENZITY NIČENÍ

Jde-li např. o boj, v němž je známa poloha cílů a v němž se palba přenáší z cíle na cíl při stálé její střední hustotě, lze předpokládat

$$\mu_1(n, m, t) = \bar{\mu}_1 = \text{const.}\,,$$

$$\mu_2(n, m, t) = \bar{\mu}_2 = \text{const.}\,,$$

v rozsahu $\bar{n} \geqq n > 0$; $\bar{m} \geqq m > 0$. Klesne-li n nebo m na nulu, musí se stát $\mu_1(n, m, t)$ a $\mu_2(n, m, t)$ nulovými. Intenzity ničení se tedy mění přetržitě.

Pro konstantní intenzity ničení bude mít rovnice (3) následující tvar:

$$\frac{dP_{nm}}{dt} = P_{n+1,m}\bar{\mu}_2 + P_{n,m+1}\bar{\mu}_1 - P_{n,m}\bar{\mu} \, . \tag{5}$$

Zde píšeme kvůli zjednodušení $P_{n,m}$ namísto $P(n, m, t)$ a $\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 = \bar{\mu}$. Rovnici (5) transformujeme Laplaceovým-Wagnerovým způsobem vzhledem k času; obdržíme:

(6) $$p\bar{P}_{n,m} - pP(n, m, 0) = \bar{P}_{n+1,m}\bar{\mu}_2 - \bar{P}_{n,m+1}\bar{\mu}_1 - \bar{P}_{n,m}\bar{\mu}\,.$$

Přitom znamená:

$$\bar{P}_{n,m} = p\int_0^{\infty} P(n, m, t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\,.$$

Dále je $P(n, m, 0)$ pravděpodobnost, že v čase $t = 0$ máme stav (n, m). Tato pravděpodobnost je nulová pro všechna n, m s výjimkou počátečních hodnot $\bar{n}$, $\bar{m}$.
Pro ně je $P(\bar{n}, \bar{m}, 0) = 1$.

Rovnice (6) neplatí však pro všechna n, m a musí být různě modifikována. Tak např. pro $n = \bar{n}$, $m = \bar{m}$ bude

$$p\bar{P}_{\bar{n},\bar{m}} - p = -\bar{P}_{\bar{n},\bar{m}}\bar{\mu}\,,$$

neboť všechna $\bar{P}_{n,m}$ jsou pro $n > \bar{n}$, $m > \bar{m}$ nulové. Je tedy

(7) $$\bar{P}_{\bar{n},\bar{m}} = \frac{p}{p + \bar{\mu}}\,,$$

takže

$$P_{\bar{n},\bar{m}} = \mathrm{e}^{-\bar{\mu}t}\,.$$

Pro $m = \text{const.} = \bar{m}$ a $\bar{n} > n \geqq 1$ platí obdobně:

$$p\bar{P}_{n,\bar{m}} = \bar{P}_{n+1,\bar{m}}\bar{\mu}_2 - \bar{P}_{n,\bar{m}}\bar{\mu}\,,$$

takže

(8) $$\bar{P}_{n,\bar{m}} = \bar{P}_{n+1,\bar{m}}\frac{\bar{\mu}_2}{p + \bar{\mu}}\,.$$

Podobně je pro $n = \bar{n}$, $1 \leqq m < \bar{m}$:

(9) $$\bar{P}_{\bar{n},m} = \bar{P}_{\bar{n},m+1}\frac{\bar{\mu}_1}{p + \bar{\mu}}\,.$$

Uvážíme-li, že stavy $(0, m)$ resp. $(n, 0)$ mohou vzniknout jen ze stavů $(1, m)$ resp. $(n, 1)$, najdeme snadno vzorce:

(10) $$\bar{P}_{n,0} = \bar{P}_{n,1}\frac{\bar{\mu}_1}{p}\,,$$

(11) $$\bar{P}_{0,m} = \bar{P}_{1,m}\frac{\mu_2}{p}\,.$$

Přitom je respektována podmínka, že pro jakýkoliv stav $(n, 0)$ nebo $(0, m)$ jsou $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ rovny nule.

Přehled o platnosti jednotlivých vzorců podává tab. I.

Tabulka I.

<table>
<tr><td>$m \diagdown n$</td><td>$\bar{n}$</td><td>$\bar{n}-1$</td><td>$\dots$</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\bar{m}$</td><td>$\bar{P}_{\bar{n},\bar{m}} = \frac{p}{p+\bar{\mu}}$</td><td colspan="3">$\bar{P}_{n,\bar{m}} = \bar{P}_{n+1,\bar{m}} \frac{\bar{\mu}_2}{p+\bar{\mu}}$</td><td rowspan="5">$\bar{P}_{0,m} = \bar{P}_{1,m} \frac{\bar{\mu}_2}{p}$</td></tr>
<tr><td>$\bar{m}-1$</td><td rowspan="4">$\bar{P}_{\bar{n},m} = \bar{P}_{\bar{n},m+1} \frac{\bar{\mu}_1}{p+\bar{\mu}}$</td><td colspan="3" rowspan="4">$\bar{P}_{n,m} = \frac{1}{p+\bar{\mu}} [\bar{P}_{n+1,m}\bar{\mu}_2 + \bar{P}_{n,m+1}\bar{\mu}_1]$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="4">$\bar{P}_{n,0} = \bar{P}_{n,1} \frac{\bar{\mu}_1}{p}$</td><td>$0$</td></tr>
</table>

Ve střední části tabulky I, tj. pro $1 \leqq n \leqq \bar{n} - 1$, $1 \leqq m \leqq \bar{m} - 1$, platí

$$\bar{P}_{n,m} = \frac{1}{p + \bar{\mu}} \left[\bar{P}_{n+1,m}\bar{\mu}_2 + \bar{P}_{n,m+1}\bar{\mu}_1\right]. \tag{12}$$

Tento vzorec vznikne z (6), uvážíme-li že je $P(n, m, 0) = 0$. Každé okénko tabulky je určeno svými čísly (n, m) a je do něho možno vepsat příslušnou pravděpodobnost $\bar{P}_{n,m}$ resp. $P_{n,m}$, kterou lze počítat, postupujeme-li podél jednotlivých řádků tabulky.

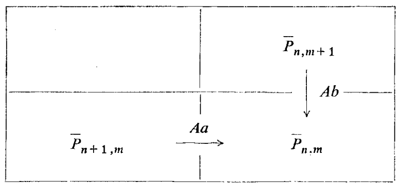
Takový výpočet je dobře možný pokud počáteční stavy nejsou velké. Na obr. 2 je graficky naznačen postupný výpočet pravděpodobnosti $\bar{P}_{n,m}$ podle (12). Přitom bylo použito označení

$$\text{(12a,b,c)} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{p}{p + \bar{\mu}}\,; \\[2ex] a = \dfrac{\bar{\mu}_2}{p}\,; \\[2ex] b = \dfrac{\bar{\mu}_1}{p}\,. \end{cases}$$

V rozsahu platnosti rovnic (12) lze však výpočet velmi usnadnit, použije-li se vytvořující funkce pravděpodobnosti $P(n, m, t)$. Zaveďme funkce:

$$F_{n,m} = P_{n,m} x^n y^m ,$$

$$P_{n,m} = \frac{F_{n,m}}{x^n y^m} .$$



Obr. 2.

Tím přejde (5) do tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{n,m} = \left[\frac{\bar{\mu}_2}{x} F_{n+1,m} + \frac{\bar{\mu}_1}{y} F_{n,m+1} - \bar{\mu} F_{nm}\right] .$$

Sečteme-li nyní tyto rovnice v plném rozsahu platných n, m, přičemž

(13a) $$\sum_n \sum_m F_{n,m} = F ,$$

obdržíme jednu rovnici pro F:

(13b) $$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\bar{\mu}_2}{x} + \frac{\bar{\mu}_1}{y} - \bar{\mu}\right) F .$$

Podrobíme-li tuto rovnici Laplaceově-Wagnerově transformaci vzhledem k času, bude

$$p\bar{F} = \left(\frac{\bar{\mu}_2}{x} + \frac{\bar{\mu}_1}{y} - \bar{\mu}\right) F + p x^{\bar{n}} y^{\bar{m}} ,$$

neboť

$$F(x, y, 0) = x^{\bar{n}} y^{\bar{m}} .$$

Bylo označeno

(13c) $$\bar{F} = p \int_0^\infty F(x, y, t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t .$$

Patrně tedy je

(14) $$\bar{F} = \frac{p x^{\bar{n}} y^{\bar{m}}}{p + \bar{\mu} - (\bar{\mu}_2/x + \bar{\mu}_1/y)} .$$

Je tedy také

$$\bar{F} = \frac{p}{p + \bar{\mu}} \left[1 - \frac{\bar{\mu}_2}{p + \bar{\mu}} \frac{1}{x} - \frac{\bar{\mu}_1}{p + \bar{\mu}} \frac{1}{y} \right]^{-1} x^{\bar{n}} y^{\bar{m}} .$$

Rozvineme-li trojčlen v nekonečnou řadu, shledáme, že obecný člen řady bude mít následující tvar:

$$\bar{F}_{\bar{n}-j,\bar{m}-k} = \frac{p}{p + \bar{\mu}} \frac{\bar{\mu}_2^j \bar{\mu}_1^k}{(p + \bar{\mu})^{j+k}} \binom{j + k}{j} x^{\bar{n}-j} y^{\bar{m}-k} . \tag{15}$$

Proto je

$$\bar{P}_{\bar{n}-j,\bar{m}-k} = \frac{p}{p + \bar{\mu}} \frac{\bar{\mu}_2^j \bar{\mu}_1^k}{(p + \bar{\mu})^{j+k}} \binom{j + k}{j} . \tag{16}$$

Použijeme-li označení (12), lze namísto (16) psát ještě

$$\bar{P}_{\bar{n}-j,\bar{m}-k} = A^{j+k+1} a^j b^k \binom{j + k}{j} . \tag{16a}$$

Tento vzorec platí v rozsahu:

$$0 \leqq j \leqq \bar{n} - 1 ,$$

$$0 \leqq k \leqq \bar{m} - 1 ,$$

tedy téměř v celém rozmezí tabulky I, vyjma její spodní řádek a poslední pravý sloupec ($k = \bar{m}$, $j = \bar{n}$). Podle vzorců uvedených v tabulce I bude, vypočteme-li $\bar{P}_{n,1}$ a $\bar{P}_{1,m}$ pomocí (16a),

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{P}_{n,0} &\equiv \bar{P}_{\bar{n}-j,0} = \binom{\bar{m} + j - 1}{j} A^{\bar{m}+j} a^j b^{\bar{m}} , \\ \bar{P}_{0,m} &\equiv \bar{P}_{0,\bar{m}-k} = \binom{\bar{n} + k - 1}{k} A^{\bar{m}+k} a^{\bar{n}} b^k . \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Vzorce (16a) a (17) určují všechny potřebné pravděpodobnosti.

Kvůli přehledu napíšeme nyní *celou* vytvořující funkci $\bar{F}$ [viz (13c)]; bude:

$$\begin{aligned} \bar{F} = & \sum_{j=0}^{\bar{n}-1} \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{j + k}{j} A^{j+k+1} a^j b^k x^{\bar{n}-j} y^{\bar{m}-k} + \\ & + \sum_{j=0}^{\bar{n}-1} \binom{\bar{m} + j - 1}{j} A^{\bar{m}+j} a^j b^{\bar{m}} x^{\bar{n}-j} + \\ & + \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{\bar{n} + k - 1}{k} A^{\bar{n}+k} a^{\bar{n}} b^k y^{\bar{m}-k} . \end{aligned} \tag{18}$$

 [Význam a, b, A viz vztahy (12a,b,c).] Ve vytvořující funkci vystupují Laplaceovy-Wagnerovy transformace pravděpodobnosti $P(\bar{n} - j, \bar{m} - k, t)$ vzhledem k času (operátor p je obsažen v a, b, A). Z rovnice (18) lze proto jednoduše odvodit distribuční funkci pro čas $t \to \infty$ podle vztahu:

$$F(\bar{n} - j, \bar{m} - k, \infty) = F_{j,k,\infty} = \lim_{p \to 0} \bar{F}\,.$$

Součiny $Ab = \bar{\mu}_1/(p + \bar{\mu})$; $Aa = \bar{\mu}_2/(p + \bar{\mu})$ mají limitu pro $p = 0$ a je:

$$\lim_{p \to 0} Ab = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}, \quad \lim_{p \to 0} Aa = \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\,.$$

Podle (18) tedy bude:

$$F_{j,k,\infty} = \sum_{j=0}^{\bar{n}-1} \binom{\bar{m} + j - 1}{j} \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\right)^{\bar{m}} \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^{j} x^{\bar{n}-j} + \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{\bar{m} + k + 1}{k} \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\right)^{k} \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^{\bar{n}} y^{\bar{m}-k}\,. \tag{19}$$

Pravděpodobnost, že prohraje protivník I v době t [$n(0) = \bar{n}$], přičemž protivníku II zbývá $(\bar{m} - k)$ jednotek, má distribuci:

$$\bar{F}_{\mathrm{I},0} = (Aa)^{\bar{n}} \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{\bar{n} + k - 1}{k} (Ab)^k y^{\bar{m}-k}\,, \tag{20}$$

a že takto prohrává v čase $t \to \infty$ bude:

$$\bar{F}_{\mathrm{I},0,\infty} = \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^{\bar{n}} \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{\bar{n} + k - 1}{k} \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\right)^{k} y^{\bar{m}-k}\,. \tag{21}$$

Pravděpodobnost, že I vůbec prohrává v čase $t \to \infty$ je

$$P_{\mathrm{I}}(0) = \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^{\bar{n}} \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{\bar{n} + k - 1}{k} \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\right)^{k}. \tag{22}$$

(Je-li $\bar{m} \to \infty$, je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\bar{n} + k - 1}{k} \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\right)^{k} = \frac{1}{(1 - \bar{\mu}_1/\bar{\mu})^{\bar{n}}}$$

a pak bude $P_{\mathrm{I}}(0) = 1$.)

Obdobné vzorce pro pravděpodobnosti prohry druhého protivníka dostaneme z (20), (21), (22), zaměníme-li v nich

$$\bar{n} \to \bar{m},\ \bar{m} \to \bar{n},\ \bar{\mu}_1 \to \bar{\mu}_2,\ \bar{\mu}_2 \to \bar{\mu}_1,\ y \to x,\ k \to j,\ b \to a,\ a \to b\,.$$

Očekávaný počet jednotek zvítězivšího protivníka II na konci boje je podle (20)

$$\bar{J}_{\mathrm{II}} = (Aa)^{\bar{n}} \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} (\bar{m} - k)(Ab)^k \binom{\bar{n} + k - 1}{k}. \tag{23}$$

Je to funkce času, kterou získáme, navrátíme-li se od operátoru p k proměnné t. Podobně je očekávaný počet zbylých jednotek druhého protivníka v čase $t = \infty$ podle (21):

$$\bar{J}_{\mathrm{II},\infty} = \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^{\bar{n}} \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} (\bar{m} - k)\left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\right)^k \binom{\bar{n} + k - 1}{k}. \tag{24}$$

Obdobně lze počítat i druhé momenty a rozptyly.

Z praktického hlediska zajímá i očekávaná doba prohry. K tomu je třeba znát distribuci času prohry. Laplaceova (nikoliv Laplaceova-Wagnerova) transformace distribuce $h(t)$ doby, po které prohrává protivník I, je podle (20):

$$\mathscr{L}[h(t)_{\mathrm{I}}] = (Aa)^{\bar{n}} \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{\bar{n} + k - 1}{k} (Ab)^k. \tag{25}$$

Očekávaná doba prohry $\bar{T}_{\mathrm{I}}$ vyjde z rovnice:

$$P_{\mathrm{I}}(0) \,.\, \bar{T}_{\mathrm{I}} = \lim_{p \to 0} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} (Aa)^{\bar{n}} \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{\bar{n} + k - 1}{k} (Ab)^k.$$

Dosadíme-li do tohoto vzorce za A, a, b podle rovnic (12), provedeme-li derivaci a přejdeme-li k limitě $p \to 0$, najdeme

$$P_{\mathrm{I}}(0) \,.\, \bar{T}_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^{\bar{n}} \frac{1}{\bar{\mu}} \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{\bar{n} + k - 1}{k} \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\right)^k (k + \bar{n}). \tag{26}$$

Podobně je

$$P_{\mathrm{II}}(0) \,.\, \bar{T}_{\mathrm{II}} = \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\right)^{\bar{m}} \frac{1}{\bar{\mu}} \sum_{j=0}^{\bar{n}-1} \binom{\bar{m} + j - 1}{j} \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^j (j + \bar{m}). \tag{27}$$

Tím lze případ s konstantními intensitami ničení zakončit.

Pro kontrolu provedeme ještě jednoduchý příklad. Předpokládejme, že jde o boj dvou protivníků, z nichž prvý má v čase $t = 0$, $\bar{n} = 2$ bojové jednotky a druhý $\bar{m} = 1$ jednotku. Intenzity ničení jsou $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$.

Pro tento případ zkonstruujeme tabulku II, řídíce se tabulkou I. Použijeme vesměs dřívějšího způsobu označování veličin.

V jednotlivých okéncích tabulky jsou zapsány Laplaceovy-Wagnerovy transformace $\bar{P}(n, m, p)$ jednotlivých pravděpodobností $P(n, m, t)$. Opět znamená:

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2\,; \quad a = \frac{\bar{\mu}_2}{p}\,; \quad b = \frac{\bar{\mu}_1}{p}\,; \quad A = \frac{p}{p + \bar{\mu}}.$$

Nyní již lze napsat distribuční funkci; bude

$$F = Ax^2y + A^2axy + A^2a^2y + Abx^2 + A^2abx\,. \tag{a}$$

Tato funkce odpovídá vzorci (18). Přejdeme-li zde k limitě $p \to 0$, obdržíme

$$F = \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^2 y + \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}x^2 + \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}x\,. \tag{b}$$

Tato funkce odpovídá vzorci (19).

Tabulka II.

$m \backslash n$	$\bar{n} = 2$	1	0
$\bar{m} = 1$	$A \xrightarrow{Aa}$	$A^2a \xrightarrow{a}$	A^2a^2
	$\downarrow b$	$\downarrow b$	
0	Ab	A^2ab	0

Je nyní snadné provést v rovnici (a) zpětnou transformaci a vrátit se k proměnné t. Najde se:

$$F = x^2ye^{-\bar{\mu}t} + xy\bar{\mu}_2te^{-\bar{\mu}t} + y\left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)[1 - e^{-\bar{\mu}t} - \bar{\mu}te^{-\bar{\mu}t}] + \tag{c}$$

$$+ x^2\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}(1 - e^{-\bar{\mu}t}) + x\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}[1 - e^{-\bar{\mu}t} - \bar{\mu}te^{-\bar{\mu}t}]\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že pro libovolné t je součet všech pravděpodobností roven jedné. Vypočtené pravděpodobnosti $P(n, m, t)$ jsou znázorněny na obr. 3 jako funkce času pro případ, že $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0{,}5$; $\bar{\mu} = 1$.

Vypočteme ještě očekávané hodnoty $E(n, t)$ a $E(m, t)$. Z rovnice (c) po parciální derivaci podle x a dosazení $x = y = 1$ najdeme:

$$E(n, t) = 2e^{-\bar{\mu}t} + \bar{\mu}_2te^{-\bar{\mu}t} + 2\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}(1 - e^{-\bar{\mu}t}) + \tag{d}$$

$$+ \frac{\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}^2}[1 - e^{-\bar{\mu}t} - \bar{\mu}t\,e^{-\bar{\mu}t}]\,.$$

V limitě $t \to \infty$ bude:

(e) $$E(n, \infty) = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\left(2 + \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right).$$

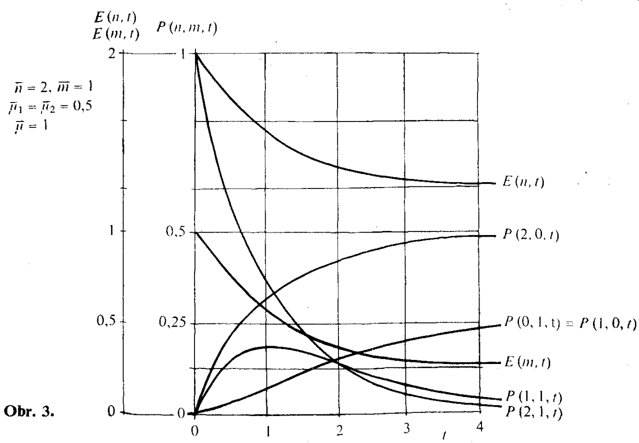
Podobně bude

(f) $$E(m, t) = e^{-\bar{\mu}t} + \bar{\mu}_2 t e^{-\bar{\mu}t} + \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^2 [1 - e^{-\bar{\mu}t} - \bar{\mu}t e^{-\bar{\mu}t}].$$

V limitě

(g) $$E(m, \infty) = \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^2.$$

Očekávané hodnoty $E(n, t)$, $E(m, t)$ jsou rovněž znázorněny na obr. 3 jako funkce času za předpokladu, že $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0{,}5$, $\bar{n} = 2$, $\bar{m} = 1$. Při deterministickém řešení by se našel lineární pokles obou očekávaných hodnot s časem. Mezi deterministickým a správným výsledkem je značný rozdíl, což se zde silně projevuje, protože počáteční množství jednotek jsou malá. Ostatně při tak malých počtech jednotek neposkytuje průběh očekávaných hodnot dostatečnou informaci.



Obr. 3.

Ze vzorce (c) je pravděpodobnost, aby protivník I prohrál v čase $t \to \infty$

(h) $$P(0, m, \infty) = \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^2 = P_1(0).$$

 Pravděpodobnost, aby prohrál za stejných podmínek protivník II je

$$(i) \qquad P(n, 0, \infty) = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\left(1 + \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right) = P_{II}(0) .$$

Poměr obou pravděpodobností prohry je

$$(k) \qquad \frac{P_{II}(0)}{P_I(0)} = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_2}\right)^2\left[1 + \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right] = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}\left[2 + \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}\right].$$

Kdyby měli mít oba stejnou pravděpodobnost prohry, musel by být tento poměr roven jedné. Tomu by odpovídal poměr $\bar{\mu}_1/\bar{\mu}_2 \doteq 1/2{,}5$. Intenzita ničení na straně druhého protivníka by musela být cca 2,5násobná, nikoliv tedy dvojnásobná, jak by zdánlivě odpovídalo poměru

$$\frac{\bar{n}}{\bar{m}} = \frac{2}{1} .$$

Nakonec ještě vypočteme očekávané doby prohry obou protivníků. K tomu použijeme vzorců (26), (27), v němž je $k = 0$.

Protože pravděpodobnost prohry prvého protivníka v čase $t \to \infty$ [viz (h)] je $P_I(0) = (\bar{\mu}_2/\bar{\mu})$ bude podle (26)

$$\left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)^2 T_I = \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right) \cdot \frac{2}{\bar{\mu}}$$

takže

$$T_I = \frac{2}{\bar{\mu}} = 2 .$$

Podobně je [viz (27)]:

$$\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}}\left(1 + \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right) T_{II} = \frac{1}{\bar{\mu}}\left(1 + 2\,\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}}\right)\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}} ,$$

takže

$$T_{II} = \frac{1}{\bar{\mu}}\,\frac{1 + 2\,(\bar{\mu}_2/\bar{\mu})}{1 + (\bar{\mu}_2/\bar{\mu})} = \frac{4}{3} .$$

Poměr očekávaných dob prohry je:

$$\frac{T_I}{T_{II}} = \frac{3}{2} .$$

Tím končíme náš příklad, který přesto, že šlo o malý počet jednotek, má všechny charakteristické rysy dané úlohy.

V dalším pojednáme krátce o případech, v nichž intenzity ničení závisí na počtu bojujících jednotek.

3. INTENZITY NIČENÍ JSOU ZÁVISLÉ NA POČTU BOJUJÍCÍCH JEDNOTEK

Předpokládejme, že intenzity ničení závisí na počtu bojujících jednotek, ale že jsou nezávislé na čase. V literatuře (viz např. [2]) se často uvádí lineární závislost μ_1 a μ_2 na n a m; tedy např.

$$\mu_1(n, m) = a_1 n + b_1 m ,$$

$$\mu_2(n, m) = a_2 n + b_2 m ,$$

přičemž n, m jsou okamžité stavy bojujících jednotek a_1, a_2, b_1, b_2 stálé součinitele. Protože tyto závislosti nesplňují podmínku, aby $\mu_1(n, m)$ a $\mu_2(n, m)$ byly nulové, bude-li buď n nebo m rovno nule, jsou vlastně μ_1 a μ_2 funkce přetržité, podobně jako tomu bylo v případě „konstantních" intenzit ničení. Tímto problémem se zde nebudeme zabývat. Postup by byl obdobný jako při konstantních intenzitách ničení, ovšem pracnější.

V dalších výpočtech budeme předpokládat, že funkce $\mu_1(n, m)$ a $\mu_2(n, m)$ jsou:

$$\mu_1(n, m) = \mu_1 \,.\, nm , \tag{28a}$$

$$\mu_2(n, m) = \mu_2 \,.\, nm . \tag{28b}$$

Tyto funkce zřejmě splňují podmínku automatického zakončení boje v okamžiku, kdy jedna strana ztratí všechny bojové jednotky.

Základní rovnice pro pravděpodobnost stavu (n, m) v čase t bude:

$$\frac{\mathrm{d}P(n, m, t)}{\mathrm{d}t} = P(n + 1, m, t)\,\mu_2(n + 1)\,m + P(n, m + 1, t)\,\mu_1 n(m + 1) - P(n, m, t)\,\mu nm . \tag{29}$$

Opět je $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Transformujme tuto rovnici způsobem Laplaceovým-Wagnerovým vzhledem k času (operátor p). Obdržíme po úpravě:

$$\bar{P}_{n,m} = \frac{p}{p + \mu nm} P_{n,m}(0) + \frac{\mu_2(n + 1)\,m}{p + \mu nm} \bar{P}_{(n+1),m} + \frac{\mu_1 n(m + 1)}{p + \mu nm} \bar{P}_{n,(m+1)} . \tag{30}$$

Laplaceovy-Wagnerovy transformace pravděpodobnosti $P(n, m, t)$ značíme jednoduše $\bar{P}_{n,m}$. Dále je $P_{n,m}(0)$ pravděpodobnost, že v čase $t = 0$ byl stav (n, m). Tato pravděpodobnost je vesměs nulová, vyjma, když $n = \bar{n}$ a $m = \bar{m}$; pak je $P(\bar{n}, \bar{m}, 0) = 1$. Počáteční stavy jednotek značíme opět $\bar{n}$, $\bar{m}$.

Rovnice (30) se redukuje v těchto zvláštních případech:

a) pro $n = \bar{n}$, $m = \bar{m}$:

(31) $$\bar{P}_{\bar{n},\bar{m}} = \frac{p}{p + \mu\bar{n}\bar{m}};$$

b) pro $m = \bar{m} = \text{const.}$, $n < \bar{n}$:

(32) $$\bar{P}_{n,\bar{m}} = \frac{\mu_2(n+1)\bar{m}}{p + \mu\bar{m}n}\bar{P}_{(\bar{n}+1),\bar{m}};$$

c) pro $n = \bar{n} = \text{const.}$, $m < \bar{m}$:

(33) $$\bar{P}_{\bar{n},m} = \frac{\mu_1\bar{n}(m+1)}{p + \mu\bar{n}m}\bar{P}_{\bar{n},(m+1)};$$

d) pro jakékoliv $n < \bar{n}$, $m < \bar{m}$:

(34) $$\bar{P}_{n,m} = \frac{\mu_2(n+1)m}{p + \mu nm}\bar{P}_{(n+1),m} + \frac{\mu_1 n(m+1)}{p + \mu nm}\bar{P}_{n,(m+1)}.$$

Vcelku je výpočet obdobný jako při „konstantních" intenzitách ničení. Nevyžaduje však zvláštních vzorců pro stavy $(0, m)$ nebo $(n, 0)$. Transformované pravděpodobnosti $\bar{P}_{n,m}$ lze počítat rekurentním způsobem. Prakticky se tak dá postupovat jen při malých počtech bojujících jednotek. Okolnost, že součinitelé v rovnicích (32) až (34) závisí na (n,m), činí výpočet velmi pracným. Jistá zjednodušení nastanou, přejdeme-li k vytvořující funkci.

Definujme

(35) $$F_{n,m} = P_{n,m}x^n y^m \quad [\text{zde } P_{n,m} = P(n, m, t)].$$

Pak je

$$\frac{\partial F_{n,m}}{\partial x\,\partial y} = \frac{x^n y^m}{xy}nm\,P_{n,m},$$

takže

(36) $$nmP_{n,m}x^n y^m = xy\frac{\partial F_{n,m}}{\partial x\,\partial y}.$$

Zavedeme-li sem místo $n \to (n+1)$, bude

(37) $$(n+1)\,mP_{n+1,m}x^n y^m = y\frac{\partial F_{n+1,m}}{\partial x\,\partial y}$$

a podobně

(38) $$n(m+1)\,P_{n,m+1}x^n y^m = x\frac{\partial F_{n,m+1}}{\partial x\,\partial y}.$$

Nyní vynásobme obě strany (29) součinem $x^n y^m$ a použijme vztahů (35) až (38); obdržíme:

$$\frac{\partial F_{n,m}}{\partial t} = \mu_2 y \frac{\partial^2 F_{n+1,m}}{\partial x\, \partial y} + \mu_1 x \frac{\partial^2 F_{n,m+1}}{\partial x\, \partial y} - \mu x y \frac{\partial^2 F_{n,m}}{\partial x\, \partial y}.$$

Takových rovnic je tolik, kolik je možných kombinací mezi n, m. Sečteme-li tyto rovnice přes všechna možná n, m a označíme-li $\sum_{n,m} F_{n,m} = F$, bude:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (\mu_2 y + \mu_1 x - \mu x y) \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}. \tag{39}$$

Tuto rovnici budeme ještě transformovat Laplaceovým-Wagnerovým způsobem vzhledem k času. Protože v čase $t = 0$ je $F(x, y, 0) = x^{\bar{n}} y^{\bar{m}}$, bude po transformaci

$$p\bar{F} - p x^{\bar{n}} y^{\bar{m}} = (\mu_2 y + \mu_1 x - \mu x y) \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x\, \partial y}. \tag{40}$$

Funkce $\bar{F}$ má následující vlastnosti: Je-li $x = 1$, $y = 1$, je $\bar{F} = 1$. Je-li $p = 0$ (tj. $t \to \infty$), je $(\partial^2 F)/(\partial x\, \partial y) = 0$ a funkce

$$\bar{F} = f_1(x) + f_2(y), \tag{41}$$

přičemž $f_1(x)$ je pouze funkcí x a $f_2(y)$ závisí pouze na y. Dále je $\bar{F}_{n,m}$ rovno nule pro všechna $n > \bar{n}$ a $m > \bar{m}$ (tedy např. je $F_{\bar{n}+1,m} = 0$ apod.).

Kdyby se podařilo rovnici (40) jednoduše řešit, byl by tím výpočet pravděpodobností $P_{n,m}$ velmi usnadněn.

Samozřejmě, že nemá smysl hledat řešení ve tvaru $F = \sum P_{n,m} x^n y^m$, protože takový postup by vedl zpět k rovnicím (30). Rovněž nemá význam hledat řešení, jež by bylo pracnější než přímé řešení rovnic (30). Nejsnáze lze postupovat tak, že rozvineme funkci $\bar{F}$ v rovnici (40) v potenční řadu podle negativních mocnin p. Předpokládáme tedy

$$\bar{F} = f_0 + \frac{1}{p} f_1 + \frac{1}{p^2} f_2 + \dots \tag{42}$$

Dosadíme-li podle (42) do (40) a porovnáme-li odpovídající si členy na obou stranách, najdeme rovnice pro stanovení neznámých funkcí $f_0, f_1, \dots$ Bude:

$$\begin{aligned} f_0 &= x^{\bar{n}} y^{\bar{m}}, \\ f_1 &= \left(\frac{\mu_2}{x} + \frac{\mu_1}{y} - \mu\right) x y \frac{\partial^2 f_0}{\partial x\, \partial y}, \\ f_2 &= \left(\frac{\mu_2}{x} + \frac{\mu_1}{y} - \mu\right) x y \frac{\partial^2 f_1}{\partial x\, \partial y} \quad \text{atd.} \end{aligned} \tag{43}$$

 Z nich lze postupně určit $f_1, f_2, \ldots$ atd. Řešení je jediné. Vzhledem ke tvaru (42) je návrat k proměnné t snadný. Jak známo, je

$$\frac{1}{p^k} = \frac{t^k}{k!}.$$

V jednoduchých případech lze řady pro t sečíst. Tam, kde jsou $\bar{n}$ a $\bar{m}$ velká čísla, je i tento postup pracný. Pro $\bar{n}$, $\bar{m}$ malá je zase výhodnější vycházet při výpočtu z rovnic (30).

Kvůli srovnání propočteme příklad, kdy na počátku ($t = 0$) má jeden protivník 2, druhý 1 bojovou jednotku. Okamžité intenzity ničení jsou $\mu_1 nm$ a $\mu_2 nm$, tedy úměrné součinu okamžitých stavů jednotek bojujících na obou stranách. Opět je $\mu_1 + \mu_2 = \mu$.

Nyní napíšeme rovnice (30) pro všechny možné stavy, přičemž respektujeme skutečnost, že pro všechna $n > \bar{n}$, $m > \bar{m}$ jsou $\bar{P}_{n,m} = 0$ a že $P_{n,m}(0)$ je vesměs nulové vyjma

$$P_{\bar{n},\bar{m}}(0) = 1.$$

Obdržíme tyto rovnice [viz (31), (32), (33)]:

$$\bar{P}_{21} = \frac{p}{p + 2\mu}; \qquad P_{21}(\infty) = 0;$$

$$\bar{P}_{11} = \frac{2p\mu_2}{(p + 2\mu)(p + \mu)}; \quad P_{11}(\infty) = 0;$$

$$\bar{P}_{01} = \frac{2\mu_2^2}{(p + 2\mu)(p + \mu)}; \quad P_{01}(\infty) = \left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)^2;$$

$$\bar{P}_{10} = \frac{2\mu_2\mu_1}{(p + 2\mu)(p + \mu)}; \quad P_{10}(\infty) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu^2};$$

$$\bar{P}_{20} = \frac{2\mu_1}{p + 2\mu}; \qquad P_{20}(\infty) = \frac{\mu_1}{\mu};$$

$$\bar{P}_{00} = 0; \qquad P_{00}(\infty) = 0.$$

Pravděpodobnosti $P_{j,k}(\infty)$ stavů j, k v čase nekonečně dlouhém najdeme jako limity $\bar{P}_{j,k}(p)$ pro $p \to 0$. Je zřejmé, že tyto pravděpodobnosti jsou nenulové jen pro stavy na konci boje. Pravděpodobnost, že v čase nekonečně dlouhém prohraje prvý, jenž měl na počátku dvě jednotky, je:

$$P_{\mathrm{I}}(0) = P_{01}(\infty) = \left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)^2.$$

Pravděpodobnost, že prohraje druhý:

$$P_{\mathrm{II}}(0) = P_{10}(\infty) + P_{20}(\infty) = \frac{\mu_1}{\mu}\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu}\right) = \frac{\mu_1}{\mu}\left(\frac{\mu_1 + 2\mu_2}{\mu}\right).$$

Poměr obou pravděpodobností:

$$\frac{P_{II}(0)}{P_I(0)} = \frac{\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)}{\mu_2^2}.$$

Kdyby tento poměr měl být roven jedné, muselo by být $\mu_2/\mu_1 \doteq 2{,}5$. Tyto výsledky jsou stejné jako byly v příkladu s konstantními pravděpodobnostmi ničení.

Zpětnou transformací Laplacových-Wagnerových obrazů se zde nebudeme zabývat. Je ostatně velmi jednoduchá. Lze při ní vycházet ze vzorce

$$\frac{p}{(p + \alpha)(p + \beta)} \doteqdot \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}.$$

Tím tento příklad uzavíráme.

Vzorce (39) lze použít k odvození základních rovnic pro očekávané hodnoty stavů bojujících jednotek $E(n)$, $E(m)$. Stačí jej derivovat jednou podle x, podruhé podle y a limitovat pro $x = 1$, $y = 1$. Našli bychom

$$\text{(44a)} \qquad \frac{\mathrm{d}\, E(n)}{\mathrm{d}t} = -\mu_2 \operatorname{Cov}(n, m),$$

$$\text{(44b)} \qquad \frac{\mathrm{d}\, E(m)}{\mathrm{d}t} = -\mu_1 \operatorname{Cov}(n, m).$$

Je vidět, že očekávané hodnoty nelze stanovit, aniž byly dříve vypočteny pravděpodobnosti $P_{n,m}(t)$ výskytu jednotlivých stavů a příslušné kovariance. Poněvadž takový postup je pracný, bere se

$$\operatorname{Cov}(n, m) \doteq E(n)\, E(m),$$

což může přibližně vyhovět, když jde o velký počet jednotek na obou stranách.

Z rovnic (44) plyne také:

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\mathrm{d}\, E(n)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\mathrm{d}\, E(m)}{\mathrm{d}t},$$

takže

$$\frac{1}{\mu_2} E(n) = \frac{1}{\mu_1} E(m) + \text{const}.$$

Použijeme-li počáteční podmínky, kdy $E(n) = \bar{n}$, $E(m) = \bar{m}$, bude

$$\text{(45)} \qquad \bar{n} - E(n) = \frac{\mu_2}{\mu_1} [\bar{m} - E(m)].$$

Závislost obou očekávaných hodnot je tedy lineární.

Z uvedeného je vidět, že výpočet pravděpodobnosti $P(n, m, t)$ je v případě, kdy intenzity ničení závisí na součinu (mn), pracný. Ukážeme však ještě, že výpočet limitních pravděpodobností $P(0, m, \infty)$ a $P(n, 0, \infty)$, tj. pravděpodobnosti výhry jedné nebo druhé strany v čase nekonečně dlouhém (nebo též pravděpodobnosti vymření), je jednoduchý a že se tyto pravděpodobnosti neliší od těch, jež příslušejí konstantním intenzitám ničení μ_1 a μ_2. S touto skutečností jsme se již potkali při řešení zde uvedených konkrétních příkladů.

Při výpočtu vyjdeme z rovnic (30), které pro tento účel upravíme. Položíme v nich $p \to 0$, takže bude pro libovolnou kombinaci $(n,, m)$, vyjma $(\bar{n}, \bar{m})$ platit:

$$\mu \bar{P}_{n,m} nm = \mu_2 \bar{P}_{n+1,m}(n + 1) m + \mu_1 \bar{P}_{n,(m+1)} n(m + 1)$$

a zavedeme

$$\bar{P}_{n,m} nm = \Pi_{nm} .$$

Pak bude

(46) $$\Pi_{nm} = \beta \Pi_{n+1,m} + \alpha \Pi_{n,m+1} ,$$

přičemž

$$\beta = \frac{\mu_2}{\mu} ; \quad \alpha = \frac{\mu_1}{\mu} .$$

Pro kombinaci $(\bar{n}, \bar{m})$ platí

$$\mu \bar{n} \bar{m} \bar{P}_{\bar{n}\bar{m}} = p = \mu \Pi_{\bar{n}\bar{m}} ,$$

takže

(47) $$\Pi_{\bar{n}\bar{m}} = \frac{\bar{P}}{\bar{\mu}} .$$

Vyjdeme-li od $\Pi_{\bar{n}\bar{m}}$, lze z (46) vypočíst všechna Π_{nm}.

Jak se snadno najde, je

(48) $$\Pi_{\bar{n}-j,\bar{m}-k} = \binom{j + k}{j} \alpha^k \beta^j \frac{p}{\mu} .$$

Vzorec (48) má smysl jen pro $j \leqq \bar{n} - 1$, $k \leqq \bar{m} - 1$.

Konkrétně je

$$\Pi_{\bar{n}-j,1} = \binom{j + \bar{m} - 1}{j} \alpha^{\bar{m}-1} \beta^j \frac{p}{\mu} ,$$

$$\Pi_{1,\bar{m}-k} = \binom{k + \bar{n} - 1}{k} \alpha^k \beta^{\bar{n}-1} \frac{p}{\mu}$$

a příslušné pravděpodobnosti (obsahují ještě operátor p):

(49a) $$\bar{P}_{\bar{n}-j,1} = \binom{j + \bar{m} - 1}{j} \alpha^{\bar{m}-1} \beta^j \frac{p}{\mu} \frac{1}{\bar{n} - j},$$

(49b) $$\bar{P}_{1,\bar{m}-k} = \binom{k + \bar{n} - 1}{k} \alpha^k \beta^{n-1} \frac{p}{\mu} \frac{1}{\bar{m} - k}.$$

Pro limitní pravděpodobnosti vymření platí:

$$P_{\bar{n}-j,0} = \frac{\mu_2}{p} (\bar{n} - j) P_{\bar{n}-j,1},$$

$$P_{0,\bar{m}-k} = \frac{\mu_1}{p} (\bar{m} - k) P_{1,\bar{m}-k},$$

takže po dosazení podle rovnic (49) obdržíme:

(50a) $$P_{\bar{n}-j,0} = \binom{j + \bar{m} - 1}{j} \alpha^{\bar{m}} \beta^j,$$

(50b) $$P_{0,\bar{m}-k} = \binom{k + \bar{n} - 1}{k} \alpha^k \beta^{\bar{n}}.$$

Porovnáním s (19) shledáme, že je to stejný výsledek jako pro konstantní intenzity ničení, jestliže bude $\mu_2/\mu = \bar{\mu}_2/\mu$ a $\mu_1/\mu = \bar{\mu}_1/\mu$, $m = \bar{m}$, $n = \bar{n}$. Výpočet pravděpodobnosti vymření (výhry jedné nebo druhé strany v nekonečném čase) je tedy i v tomto případě snadný. Okolnost, že zde pravděpodobnosti vymření nezávisí na tvaru funkcí vyjadřujících intenzity ničení, má pro praxi značný význam, protože o vhodném tvaru těchto funkcí bývá často obtížné rozhodnout.

(Došlo dne 10. listopadu 1965.)

LITERATURA

[1] Е. С. Бентцель: Введение в исследоване операций. Советское радио, Москва 1964.
[2] R. H. Brown: A stochastic analysis of Lanchesters theory of Combat. Oper. Research Office, ORO-T-323, 1955.

Random Conflicts

Jaroslav Kožešník

In the present paper two problems of random conflicts under different assumptions on ruining intensities are solved. The first case deals with constant ruining intensities, the second case deals with intensities proportional to the immediate number of active individuals of both opponents. Probabilities of immediate numbers of individuals, probabilities of winning for each opponent as functions of time, expected time of winning, and other statistics are given. The discussed cases can serve as simple models of ruining which can be met at various forms of biological conflicts.

Akademik Jaroslav Kožešník, Československá akademie věd, Národní 3, Praha 1.