KYBERNETIKA ČÍSLO 1, ROČNÍK 2/1966

Lineárny model procesu učenia

RUŽENA BAJCSYOVÁ

V článku sa preberá lineárny pravdepodobnostný model učenia podľa Busha-Mostellera, pričom tento model sa analyzuje z hľadiska technického využitia. Okrem toho je ukázané, že ak uvažujeme sústavu vo vonkajšom prostredí, lineárny model platí len vo veľmi obmedzených prípadoch.

ÚVOD

Štúdium dejov pri prijímaní nových poznatkov u živých organizmov zaujíma fyziológov, psychológov a v konečnej fázi i pedagógov. Technikov v spojitosti s procesom učenia zaujímajú tieto otázky z hľadiska chovania sa rozličných kybernetických zariadení a automatov. V našom článku pod pojmom učenie sa budeme rozumieť proces, v ktorom sústava na určité vonkajšie popudy – stimuly $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_r$ odpovedá na výstupe postupne takými reakciami $A_1, A_2, \ldots, A_r$, ktoré konvergujú k určitému predom dannému cieľu. Proces učenia sa s výhodou študuje na matematických modeloch. V literature [1], [2], [3], sa popisujú rozličné typy matematických modelov. Z nich z matematického hľadiska veľmi jednoduchý je model uvedený v [2], pričom postačuje pre popis rozmanitých prípadov učenia a súčasne dovoluje hlboký, analytický rozbor a umožňuje modelovanie na počítačoch.

V prvej časti článku stručne sa preberajú základné princípy uvedeného modelu. Pritom obecný model analyzujeme pre niektoré špeciálne prípady, ktoré sú zaujímavé z hľadiska technického využitia (prípad s ideálnou pamäťou je analogický napr. klopnému obvodu, prípad s úplne potlačenou pamäťou je analogický napr. kombinačnému logickému prvku, prípad s reálnou pamäťou zodpovie napr. techniickému kondenzátoru).

V druhej časti rozoberáme vzájomné pôsobenie sústavy a vonkajšieho prostredia, pričom vychádzame z predpokladov [2].

Aby se mohli sledovať zmeny v chovaní sa sústavy (či už pod sústavou rozumieme živý organizmus alebo automat) musíme rozlišovat reakcie sústavy, ktoré vznikajú ako odozva na stimuly $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Reakcie tvoria množinu alternatív $A_1, A_2, \ldots \ldots, A_r$. Každá z alternatív môže sa pri jednej skúmanej sústave a pri jednom pokuse (napríklad v n-tom pokuse) vyskytovať s pravdepodobnosťami $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Uvedené komponenty tvoria pravděpodobnostný vektor $\boldsymbol{p}$, ktorý súčasne charakterizuje stav sústavy v danom časovom okamihu, čiže pri jednom napr. n-tom pokuse. O vektori $\boldsymbol{p}_n$ platí, že

$$\sum_{i=0}^{r} (p_i)_n = 1\,, \quad 0 \leqq (p_i)_n \leqq 1\,.$$

Predpokladajme, že učiaci proces matematicky popisuje operátor $O(\boldsymbol{p})$, ktorý je definovaný nekonečným mocninovým radom

$$O(\boldsymbol{p})_n = a_0 + a_1 \boldsymbol{p}_{(n-1)} + a_2 \boldsymbol{p}^2_{(n-1)} + \ldots,$$

vektory $\boldsymbol{p}_{n-1}$ a $\boldsymbol{p}_n$ znamenajú pravděpodobnosť chovania sa sústavy v $(n-1)$ a v n-tom kroku. Operátor O vykonaný nad vektorom $\boldsymbol{p}$ vyjadruje predpoveď stavu sústavy v nasledujúcom kroku.

Z dôvodov zjednodušenia urobme lineárnu aproximáciu. Toto priblíženie je možné a vyhovuje praktickým aplikáciám, čo dokazujú experimenty Solomona, Winae a Brunswika, Stanleyho a ďalších [2]. Zaveďme substitúciu

$$a_0 = (1 - \alpha_i) \,.\, \lambda_i\,,$$
$$a_1 = \alpha_i$$

a označme lineárnu aproximáciu operátorom $Q(p)$. Výraz $Q_i(p_i)$ znamená pravdepodobnosť i-tej reakcie v nejakom n-tom kroku, pričom $p = p_i$ je pravdepodobnosť i-tej reakcie v $(n - 1)$ vom kroku. Zavedením substitúcie dostáváme lineárny model učenia sa:

(1) $$Q_i(p_i) = Q_i(p) = \alpha_i p + (1 - \alpha_i)\,\lambda_i\,,$$

iné označenie:

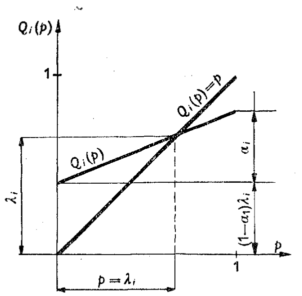
(1*) $$P(A_i)_n = \alpha_i\, P(A_i)_{n-1} + (1 - \alpha_i)\,\lambda_i\,.$$

VÝZNAM PARAMETROV λ_i A α_i

λ_i je taká pravdepodobnosť objavenia sa reakcie A_i, ku ktorej sa sústava v priebehu procesu učenia blíži a akonáhle ju dosiahne končí sa proces učenia. Pokusime sa to vysvetliť z iného hľadiska. Keď sa pozrieme na rovnicu (1*) vidíme, že je to vlastne diferenčná rovnica, ktorej riešenie je

(2) $$P(A_i)_n = \alpha_i^n P(A_i)_0 + (1 - \alpha_i^n) \lambda_i ,$$

kde $P(A_i)_0$ je počiatočná pravdepodobnosť objavenia sa reakcie A_i na výstupe sústavy (bez stimulu).



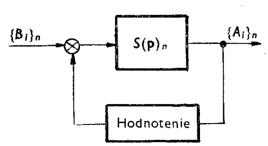
Obr. 1.

Na obr. 1 je grafické znázornenie rovnice (1), kde sú vyznačené jednotlivé hodnoty pravdepodobností po každom kroku $Q_i(p)_1, Q_i(p)_2, \ldots, Q_i(p)_n$ a tieto hodnoty tvoria postupnosť konvergujúcu v hodnote λ_i (za predpokladu, že $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$). Keďže λ_i je pravdepodobnosť, môže nadobúdať hodnoty len v intervale $0 \leqq \lambda_i \leqq 1$.

α_i je parametr, ktorý vyjadruje vplyv neučenia sa, rozptylovania sa. V uvažovanom modeli sa môže α_i nachádzať len v intervale $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$. Zaujmavé sú dve hraničné hodnoty α_i. Ak $\alpha_i = 0$, tj. koeficient rozptylovania je minimálny, potom ako to vyplýva z rovnice (1)

$$Q(p) = \lambda_i ,$$

čo znamená že nech počiatočná pravdepodobnosť bola akákoľvek, v ďalšom kroku pravdepodobnosť sa bude rovnať λ_i, tj. končí sa proces učenia. V druhom prípade



Obr. 2.

ak $\alpha_i = 1$, tj. koeficient rozptylovania je maximálny, potom ako to vyplýva z rovnice (1) je

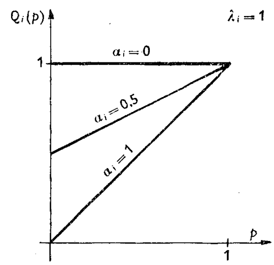
$$Q_i(p) = p ,$$

čo vyjadruje proces neučenia sa. V priebehu procesu učenia vedomosti nepribúdajů ani neubúdajú. Na základe toho čo tu bolo povedané o chovaní sa sústavy v priebehu učenia sa, môžeme toto chovanie znázorniť aj na blokovej schéme. Viď obr. 2. Sústava $S(p)$ se učí, ak jej činnosť, ktorá sa prejavuje navonok reakciami $\{A_i\}_n$ na stimuly $\{B_i\}_n$ smeruje k predom danému cieľu — naučeniu sa. To je možné len vtedy, ak v nej vnútri pracuje samokontrola, ktorá v závislosti na reakcii sústavy zosilňuje alebo zoslabuje učiaci proces.

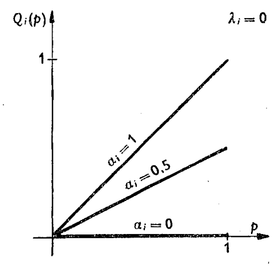
ROZBOR NIEKTORÝCH ŠPECIÁLNYCH PRÍPADOV OBECNÉHO MODELU

1. Proces učenia, ak sústava má ideálnu pamäť, nastáva keď $\lambda_i = 1$. Graficky je tento proces znázornený na obr. 3, kde α_i je parametr. Rovnica (1) zmení svoj tvar

$$Q(p) = \alpha_i p + (1 - \alpha_i)\,.$$



Obr. 3.



Obr. 4.

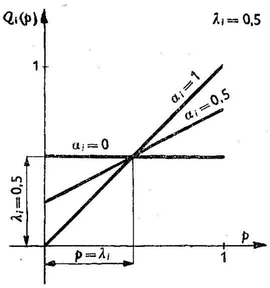
2. Proces učenia, ak sústava je bez pamäti, nastáva keď $\lambda_i = 0$. Graficky je tento proces znázornený na obr. 4. kde zase α_i je parametr. Rovnica (1) zmení svoj tvar

$$Q_i(p) = \alpha_i p\,.$$

3. Proces učenia, ak sústava má reálnu pamäť. Zoberieme príklad keď $\lambda_i = 0{,}5$, potom rovnica (1) bude mať tvar

$$Q_i(p) = \alpha_i p + (1 - \alpha_i)\, 0{,}5 .$$

Grafické znázornenie sústavy s reálnou pamäťou je na obr. 5, pričom α_i je parameter.



Obr. 5.

ROZDELENIE MNOŽINY r ALTERNATÍV NA DVE PODMNOŽINY

Zatiaľ sme definovali učiaci model pre jednu ľubovoľnú reakciu z množiny r alternatív. V ďalšom budeme uvažovať model, kde sústava bude reagovať vždy len tak, že tieto reakcie môžeme zaradiť do dvoch skupín a to jednu, ktorá podporuje činnosť učenia, tj. dosiahnutie cieľa — naučenia sa, a ostatná činnosť. Potom pravdepodobnosť, že nastane reakcia A_1 je p a že nastane reakcia A_2 je $q = 1 - p$. Takto máme na začiatku, pred pôsobením stimulov rozdelenú pravdepodobnosť sústavy. Podobne budeme uvažovať len dve triedy stimulov B_1 a B_2, pričom jedna podporuje proces učenia a druhá ho brzdí (pochvaly a tresty napr.).

Na základe rozdelenia reakcií a stimulov na dve skupiny u všeobecného modelu učenia, ktorý popisuje rovnica (1), dostávame: Ak máme sústavu, ktorej vnútorny stav je charakterizovaný vektorom $\boldsymbol{p}$ v $(n - 1)$-vom kroku.

$$\boldsymbol{p}_{n-1} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}_{n-1} = \begin{bmatrix} P(A_1) \\ P(A_2) \end{bmatrix},$$

tak pravdepodobnosť, že v n-tom kroku nastane reakcia A_1 udáva rovnica

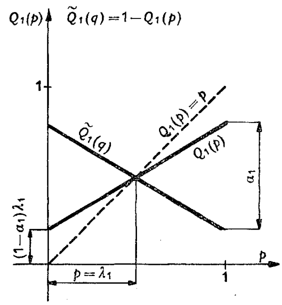
$$P(A_1 \mid A_1)_n = Q_1(p) = p \,.\, \alpha_1 + (1 - \alpha_1)\, \lambda_1 = p(A_1)_{n-1} \,.\, \alpha_1 + (1 - \alpha_1)\, \lambda_1$$

a pre reakciu A_2

$$P(A_2 \mid A_1)_n = Q_2(p) = p\alpha_2 + (1 - \alpha_2)\, \lambda_2 = p(A_2)_{n-1} \,.\, \alpha_2 + (1 - \alpha_2)\, \lambda_2 .$$

Uvedené rovnice vyjadrujú závislosť na pravdepodobnosti reakcie A_1 v $(n - 1)$-vom kroku. Podobne bude platiť, ak budeme uvažovať v $(n - 1)$-vom kroku pravdepodobnosť reakcie A_2. Potom v n-tom kroku pravdepodobnosť výskytu reakcie A_1 udáva rovnica

$$P(A_1 \mid A_2)_n = \tilde{Q}_1(q) = 1 - Q_1(p) = \alpha_1 q + (1 - \alpha_1) \, . \, (1 - \lambda_1) =$$
$$= \alpha_1 \, P(A_2)_n + (1 - \alpha_1)(1 - \lambda_1)$$



Obr. 6.

a pre reakciu A_2

$$P(A_2 \mid A_2)_n = \tilde{Q}_2(q) = 1 - Q_2(p) = \alpha_2 q + (1 - \alpha_2) \, . \, (1 - \lambda_2) =$$
$$= \alpha_2 \, P(A_2)_n + (1 - \alpha_2)(1 - \lambda_2) \, .$$

Kvôli názornosti uvedieme na obr. 6. prvé dva prípady.

PRIEBEH UČIACEHO PROCESU PRI n-NÁSOBNOM OPAKOVÁNÍ

Postupnosť vstupných stimulov a výstupných reakcií sústavy pri viacnásobnom opakování môže zásadne tvoríť tri rozličné prípady:

1. postupnosť náhodilá, kde reakcie alebo stimuly sú soskupené v náhodilom poradí $(A_1 \, A_2 \, A_2 \, A_1 \, A_1 \, A_1 \ldots)$;

2. postupnosť s určitou vnútornou závislosťou, kde členy postupnosti sú napríklad v takejto závislosti: za reakciou A_2 vždy nasleduje reakcia A_1, pričom za reakciou A_1 môže nasledovať ľúbovolný počet reakcí A_1 $(A_2 \, A_1 \, A_1 \, A_2 \, A_1 \, A_1 \, A_1 \ldots)$;

3. postupnosť systematická, kde jednotlivé členy postupnosti sa pravidelne opakujú $(A_1 \, A_1 \, A_2 \, A_1 \, A_1 \, A_2 \, A_1 \, A_1 \, A_2 \ldots)$.

Analyticky aplikujúc všeobecný model, dá sa vyjadriť priebeh procesu učenia po n-násobnom opakování len u systematickej postupnosti stimulov, pôsobiacich na sústavu. Ako sme už ukázali pri vysvetlovaní parametrov λ_i po n-násobnom opakování je pravdepodobnosť objavenia sa reakcie A_1 daná výrazom

$$Q_1^n(p) = \alpha_1^n \cdot p + (1 - \alpha_1^n)\,\lambda_1$$

kde p je pravdepodobnosť reakcie A_1 na počiatku. Ak $n \to \infty$ a $0 < \alpha_1 \leqq 1$ v limite nadobudne tento výraz hodnotu

$$\lim_{n \to \infty} Q_1^n(p) = \lambda_1 .$$

Prípady $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$ sú špeciálne, ktoré sme rozoberali v predchádzajúcich odstavcoch. Grafické znázornenie týchto závislostí pre rozličné parametre α sú na obr. 7. Ako je z obrázku vidieť sústava pri n-násobnom opakování v limite pre $n \to \infty$ blíži sa k hraničnej hodnote λ.

Podobne pre postupnosť, kde sa v systematickom poradí vyskytujú podnety B_1 a B_2 pričom počet objavení sa stimulov B_1 je u a počet stimulov B_2 je v. Potom platí, že po n násobnom opakovaní pravdepodobnosť naučenia sa je vyjadrená rovnicou:

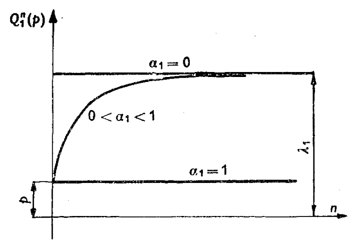
$$Q_{u,v}^n(p) = \alpha_{u,v}^n p + (1 - \alpha_{u,v}^n) \cdot \lambda_{u,v} .$$

Ako je vidieť, vzťah je lineárny, len koeficienty majú iný smysel:

$$\alpha_{u,v} = \alpha_1^u \cdot \alpha_2^v ,$$

$$\lambda_{uv} = \frac{\alpha_2^v(1 - \alpha_1^u)\,\lambda_1 + (1 - \alpha_2^v)\,\lambda_2}{1 - \alpha_1^u \cdot \alpha_2^v}$$

Postupnosti náhodilé môžeme vyjadriť len pomocou pravdepodobnostných metod ako je například metóda Monte Carlo.



Obr. 7.

SÚSTAVA A VONKAJŠIE PROSTREDIE PRI PROCESE UČENIA

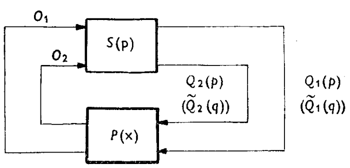
Doposiaľ sme sa zaoberali s chovaním sústavy v procese učenia bez ohľadu na to v akom prostredí sa nachádza. Presnejšie povedané, vplyv vonkajšieho prostredia sme čiastočne zahrnovali do koeficientu vplyvu neučenia sa α a do pôsobenia vonkajších stimulov, ktoré však možu ale i nemusia závisieť od vonkajšieho prostredia — to záleží od prípadu, ktorý práve vyšetrujeme. Na vonkajšie prostredie sa možeme dívať ako na nejakú sústavu so všetkými vlastnosťami ako už bolo o sústavách povedané. To znamená, že keď nás bude zaujímať sústava vo vonkajšom prostredí a ich vzájomné pôsobenie, môžeme uvažovat dve sústavy vzájomne posobiace na seba.

Podľa chovania sústavy na vonok, jej reakcií, usudzujeme na vnútorný stav sústavy. Potom hovoríme o sústave, že je:

1. náhodilá,
2. podmienená,
3. determinovaná.

Je zrejmé, že sústava a vonkajšie prostredie tvoria rozličné kombinácie jednotlivých prípadov. Tak napríklad: determinovaná sústava v náhodilom prostredí alebo náhodilá sústava v podmienenom prostredí atď.

Vzťahy, ktoré určujú závislosti medzi sústavou a vonkajším prostredím z hľadiska výslednej reakcie odvodíme takouto úvahou: Na začiatku musíme povedať, že uvažujeme determinovanú sústavu (determinovaná je v tom slova zmysle, že je daný matematický model sústavy i keď je to pravdepodobnostný model) s náhodilými reakciami v podmienenom prostredí (prostredie reaguje v závislosti na reakcii sústavy). Nech platí, že sústava má počiatočný stav charakterizovaný pravdepodobnostným vektorom $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ a vonkajšie prostredie má počiatočný stav charakterizovaný pravdepodobnostným vektorom $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Přičom platí že $x + y = 1$. Pravdepodobnosť, že v ďaľšom kroku nastane reakcia A_1 je daná výrazmi $Q_1(p)$ a $Q_2(p)$. Podimenenosť vonkajšieho prostredia spočívá v tom, že na reakciu A_1, ktorá má počiatočnú pravdepodobnosť p odpovedá prostredie odpoveďou O_1



Obr. 8.

s počiatočnou pravdepodobnosťou x. Podobne na reakciu A_2 s počiatočnou pravdepodobnosťou q prostredie odpovedá odpoveďou O_2 s počiatočnou pravdepodobnosťou y. Keďže ide o deje súčasné (vzájomné pôsobenie sústavy a vonkajšieho prostredia sa deje súčasne) výsledná pravdepodobnosť je závislá na súčine pravdepodobností $x . Q_1(p)$ v jednom prípade a v druhom případe na $y . Q_2(p)$. Avšak tieto dva prípady sa vyskytujú alternativne, preto výsledná pravdepodobnosť p_n v n-tom kroku, že nastane reakcia A_1 je daná vzťahom:

$$p_n = x_{n-1}\, Q_1(p)_n + y_{n-1}\, Q_2(p)_n\,. \tag{2}$$

Podobnou úvahou by sme dospeli, že výsledná pravdepodobnosť reakcie A_2 je daná vzťahom:

$$q_n = x_{n-1}\, \tilde{Q}_1(q)_n + y_{n-1}\, \tilde{Q}_2(q)_n\,.$$

Na obr. 8. je znázornené blokové schéma pôsobenia sústavy S s vnútorným stavom $\boldsymbol{p}$ a vonkajšie prostredie P s vnútorným stavom $\boldsymbol{x}$.

Vyšetrovanie priebehu učenia sa sústavy vo vonkajšom prostredí ak:

1. vonkajšie prostredie je stacionárne, nepriamo závislé na reákcii sústavy,
2. vonkajšie prostredie je priamo závislé na reakcii sústavy, stacionárne.

1. Vonkajšie prostredie stacionárne; nepriamo závislé na reakcii sústavy. To znamená, že počas celého procesu učenia vonkajšie prostredie bude reagovať na sústavu s konštantnými pravdepodobnosťami, tj. $x = k_1$ a $y = k_2$, pričom platí, že $k_1 + k_2 = 1$.

Keď aplikujeme všeobecný vzťah pre vyjadrenie pravdepobonosti sústavy a vonkajšieho prostredia dostávame pre výslednú pravdepodobnosť

$$p_n = k_1\, Q_1(p)_n + k_2\, Q_2(p)_n\,;$$

ak označíme

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \alpha'$$

a

$$k_1(1-\alpha_1)\,\lambda_1 + k_2(1-\alpha_2)\,\lambda_2 = (1-\alpha')\,\lambda'\,,$$

dostávame lineárny model učenia s iným významom konštant

$$p_n = \alpha' \,.\, p_{n-1} + (1-\alpha')\,\lambda'$$

a po n-násobnom opakování bude

$$p_n = \alpha'^n \,.\, p_0 + (1-\alpha')\,.\,\lambda'$$

ak $n \to \infty$. Hraničná hodnota je tedy znova

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lambda'\,.$$

2. Vonkajšie prostredie priamo závislé na reakcii sústavy. Vtedy platí, že pravdepodobnostný vektor sústavy $\boldsymbol{p}$ je totožný s pravdepodobnostným vektorom vonkajšieho prostredia $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ak toto dosadíme do rovnice (2) dostávame

$$p_n = p_{n-1}\, Q_1(p)_n + q_{n-1}\, Q_2(p)_n\,;$$

po n-násobnom opakovaní

$$p_n = C_{n0} + \sum_{k=1}^{2^n} C_{nk} \,.\, p_0^k \tag{3}$$

kde p_0 je počiatočná pravdepodobnosť reakcie A_1 a konštanty $C_{n0}, C_{n1}, \ldots, C_{nk}$ sú zložené z parametrov $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$. Ako je zo vzťahu (3) vidieť p_n už nie je lineárna funkcia. Uvedený výraz (3) rýchle konverguje za predpokladu, že konštanty C_{n0}, $C_{n1}, \ldots, C_{nk}$ sú v intervale $\langle 0, 1 \rangle$, a v limite pre $n \to \infty$ sa blíží k hodnote C_{n0} čo zodpovie nám už známej hraničnej hodnote λ.

ZÁVER

Záverom možeme povedať, že lineárny model pre svoju jednoduchosť dobre vyhovuje pre štúdium procesov učenia sústavy bez ohľadu na vonkajšie prostredie. Akonáhle však uvažujeme sústavu vo vonkajšom prostredí, lineárny model platí len vo veľmi špeciálnych prípadoch (stacionárne prostredie napr.). V prípade, že vonkajšie prostredie je priamo závislé na reakcii sústavy platí lineárny model len vtedy ak $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, vtedy totiž všetky konštanty vo výraze (3), tj. $C_{n2}, \ldots, C_{nk}$, ktoré sú súčiniteľmi pri premenej vyšieho rádu ako prvého sú nulové. V obecnom prípade ak $\alpha_1 \neq \alpha_2$, ako je to odvodené v článku, neplatí lineárna závislosť pri n násobnom opakování, keď sa sústavy nachádza v podmienenom prostredí.

(Došlo dne 24. dubna 1965.)

LITERATÚRA

[1] W. R. Ashby: Design for a Brain. Wiley, New York 1952.
[2] R. R. Bush, F. Mosteller: Stochastic Models for Learning. Wiley, New York 1955.
[3] S. Gorn: On the Mechanical Simulation of Habit-Forming and Learning. Information and Control 2 (1959), 3, 226—259.

Linear Model of the Learning Process

RUŽENA BAJCSYOVÁ

The article deals with the linear probabilistic model of learning according to Bush-Mosteller, the model being analysed from the point of view of technical application. It is also shown that if a system is considered in the outer environment, the linear model is valid only in limited cases.

Inž. Ružena Bajcsyová, Katedra matematických strojov SVŠT, Bratislava, Vazovova 1b.