KYBERNETIKA ČÍSLO 6, ROČNÍK 1/1965

Критерий абсолютной устойчивости многосвязных импульсных систем с нестационарными характеристиками нелинейных элементов*

Я. З. Цыпкин, М. С. Эпельман

В статье установлен весьма общий частотный критерий устойчивости многосвязных импульсных систем с нестационарными характеристиками нелинейных элементов. Использование обобщенной теоремы Бохнера и элементарных понятий функционального анализа позволило дать весьма простое его доказательство.

Сформулированный критерий содержит, в качестве частных случаев, критерии устойчивости многосвязных импульсных систем со стационарными и нестационарными характеристиками нелинейных элементов, полученные в предшествующих работах.

Рассмотрим многосвязную импульсную систему, содержащую сложную линейную непрерывную часть, M синфазно работающих импульсных элементов и M нелинейных элементов, характеристики которых, вообще говоря, зависят от времени, которая описывается векторным разностным уравнением

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{f}[n] - \sum_{m=0}^{n} \mathbf{w}[n-m]\,\Phi(\mathbf{x}[m], m)\,. \tag{1}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\mathbf{x}[n]$, $\mathbf{f}[n]$, $\Phi(\mathbf{x}[n], n)$ - M-мерные векторы ошибки, внешнего воздействия и характеристик нелинейных элементов, соответственно; $\mathbf{w}[n]$ – квадратная $(M \times M)$ матрица импульсных характеристик линейной импульсной части (ЛИЧ), включающей импульсные элементы и сложную непрерывную часть.

Предположим, что ЛИЧ устойчива, тогда элементы матрицы $\mathbf{w}[n]$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} w_{sr}[n] = 0\,, \quad (s, r = 1, 2, \ldots, M)\,; \tag{2}$$

предположим также, что характеристики нелинейных элементов при любом

* Доклад, прочитанный на *Международной конференции по многомерным и дискретным системам автоматического управления*, г. Прага 9–12 июня 1965 г.

$n \geqq 0$ принадлежат секторам $(\alpha, k_{rr} - \alpha)$, т. е. элементы вектора $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}[n], n)$ удовлетворяют неравенствам

$$(3) \qquad \boldsymbol{\Phi}(0, n) = \boldsymbol{O}\,; \quad \alpha x_r^2[n] \leqq \Phi_r(x_r[n], n)\, x_r[n] \leqq (k_{rr} - \alpha)\, x_r^2[n]\,,$$

где α — сколь угодно малое положительное число, а $k_{rr} > 0$ — элементы диагональной матрицы $\boldsymbol{K}$.

Будем далее говорить, что вектор $\boldsymbol{f}[n]$ исчезающий, если его норма $\|\boldsymbol{f}[n]\| = \max\limits_r \|\boldsymbol{f}_r[n]\|$ с ростом n стремится к нулю таким образом, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\boldsymbol{f}[n]\| < \infty\,.$$

Если при любом исчезающем векторе внешнего воздействия $\boldsymbol{f}[n]$ и любых характеристиках нелинейных элементов, в общем случае, нестационарных, принадлежащих секторам $(\alpha, k_{rr} - \alpha)$, вектор ошибки будет исчезающим, то будем называть многосвязную импульсную систему (1) абсолютно устойчивой.

Критерий абсолютной устойчивости многосвязной импульсной системы можно сформулировать в виде теоремы:

Для того, чтобы многосвязная импульсная система с устойчивой ЛИЧ и характеристиками нелинейных элементов, принадлежащих секторам $(\alpha, k_{rr} - \alpha)$, *была абсолютно устойчива, достаточно, чтобы существовало такое число* $\varkappa$, *при котором*

$$(4) \qquad \tfrac{1}{2}\{\boldsymbol{K}^{\varkappa}\boldsymbol{W}^*(\mathrm{j}\bar{\omega}) + \boldsymbol{W}^{*T}(-\mathrm{j}\bar{\omega})\,\boldsymbol{K}^{\varkappa}\} + \boldsymbol{K}^{\varkappa-1} > 0\,, \quad 0 \leqq \bar{\omega} < \pi\,;$$

т. е. эрмитова матрица, стоящая в левой части неравенсва (4), *являлась положительно определенной при любом* $\bar{\omega} \in [0, \pi)$.

В (4) $\boldsymbol{W}^*(\mathrm{j}\bar{\omega})$ представляет собой матрицу частотных характеристик ЛИЧ, определяемой известным из теории D-преобразования [1] соотношением

$$(5) \qquad \boldsymbol{W}^*(\mathrm{j}\bar{\omega}) = D\{\mathbf{w}[n]_{q=\mathrm{j}\bar{\omega}}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\bar{\omega}n}\,\mathbf{w}[n]\,,$$

а T означает операцию транспонирования.

Для системы с одним импульсным элементом, $M = 1$, из (4) получаем после сокращения на $\boldsymbol{K}^{\varkappa}$ известный [2] результат

$$(6) \qquad \tfrac{1}{2}\{\boldsymbol{W}^*(\mathrm{j}\bar{\omega}) + \boldsymbol{W}^*(-\mathrm{j}\bar{\omega})\} + \boldsymbol{K}^{-1} = \operatorname{Re}\boldsymbol{W}^*(\mathrm{j}\bar{\omega}) + \frac{1}{k} > 0\,.$$

Полагая в (4) $\varkappa = 0$, будем иметь

$$(7) \qquad \tfrac{1}{2}\{\boldsymbol{W}^*(\mathrm{j}\bar{\omega}) + \boldsymbol{W}^{*T}(-\mathrm{j}\bar{\omega})\} + \boldsymbol{K}^{-1} > 0\,.$$

Этот результат был получен Джури и Ли [3] на основе формулы Парсеваля; он является обобщением (6) на случай многосвязных систем. Подобный же результат (правда, для равных секторов: $k_{rr} = k$, $r = 1, 2, \ldots, M$) впервые был установлен Халанаем [4].

Наметим вкратце доказательство теоремы. Составим в силу уравнения (1) выражение

$$\sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}[n], n)\,\{\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{x}[n] - \mathbf{K}^{\varkappa-1}\,\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}[n], n)\} = \sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}[n], n)\,\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{f}[n] - \Gamma_{\varkappa}(N)\,, \tag{8}$$

здесь

$$\Gamma_{\varkappa}(N) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n} \boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}[n], n)\,\{\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{w}[n-m] + \mathbf{K}^{\varkappa-1}\,\sigma[n-m]\}\,\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}[m], m)\,. \tag{9}$$

В (8) и (9) N – целое число, а

$$\sigma[n-m] = \begin{cases} 1, & n = m\,, \\ 0, & n \neq m\,. \end{cases}$$

Если при всех $N > 0$ выполняется условие

$$\Gamma_{\varkappa}(N) \geqq 0\,, \tag{10}$$

то из (8) следует неравенство

$$\sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}[n], n)\,\{\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{x}[n] - \mathbf{K}^{\varkappa-1}\,\boldsymbol{\Phi}(x[n], n)\} \leqq \sum_{n=0}^{N} \Phi^T(\mathbf{x}[n], n)\,\mathbf{K}^{\varkappa}\mathbf{f}\,[n]\,. \tag{11}$$

Оценим с помощью норм левую часть неравенства (11) снизу, а правую – сверху.

$$\sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}[n], n)\,\{\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{x}[n] - \mathbf{K}^{\varkappa-1}\,\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}[n], n)\} \geqq A\sum_{n=0}^{N} \|\mathbf{x}[n]\|^2\,, \tag{12}$$

где

$$A = (\max_i k_{ii})^{\varkappa-1}\alpha^2\,;$$

и

$$\sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}[n], n)\,\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{f}[n] \leqq B\sum_{n=0}^{N} \|\mathbf{x}[n]\|\,,$$

где

$$B = M(\max_i k_{ii})^{\varkappa} \sup_i \|\mathbf{f}[n]\|\,. \tag{13}$$

Тогда (11) можно заменить более сильным неравенством

$$(14)\qquad A\sum_{n=0}^{N}\|\mathbf{x}[n]\|^2 \leqq B\sum_{n=0}^{N}\|\mathbf{x}[n]\|\,.$$

Из (14) следует, что норма $\|\mathbf{x}[n]\|$ ограничена, а значит и ограничена $\|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}[n], n)\|$. Следовательно,

$$(15)\qquad \sum_{n=0}^{N}\boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}[n], n)\,\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{f}[n] < M\sum_{n=0}^{N}\|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}[n], n)\|\,(\max_i k_{ii})^{\varkappa}\,\|\mathbf{f}[n]\| \leqq$$

$$\leqq M(\max_i k_{ii})^{\varkappa}\sup_n\|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}[n], n)\|\,.\sum_{n=0}^{N}\|\mathbf{f}[n]\|\,.$$

Но поскольку вектор $\mathbf{f}[n]$ исчезающий, то ряд $\sum_{n=0}^{N}\|\mathbf{f}[n]\|$ сходится, и поэтому правая часть неравенства (15), а значит и (11), всегда ограничена. Отсюда заключаем, что ограничены частные суммы ряда

$$(16)\qquad \sum_{n=0}^{N}\boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}[n], n)\,\{\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{x}[n] - \mathbf{K}^{\varkappa-1}\,\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}[n], n)\}\,.$$

Но в силу (3), каждый член этого ряда не отрицателен, поэтому ряд (16) сходится и его общий член стремится к нулю. Учитывая неравенство (12), заключаем, что вектор ошибки $\mathbf{x}[n]$ исчезающий, и значит

$$(17)\qquad \|\mathbf{x}[n]\| \to 0\,,\quad n \to \infty\,,$$

что и доказывает абсолютную устойчивость.

Для установления условий выполнимости неравенства (10), преобразуем его к виду:

$$(18)\qquad \Gamma_{\varkappa}(N) = \sum_{m,n=1}^{N}\boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}[n], n)\,\{\mathbf{K}^{\varkappa}\,\hat{\mathbf{w}}[n-m] + \mathbf{K}^{\varkappa-1}\,\sigma[n-m]\}\,.$$

$$.\,\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}[m], m) \geqq 0$$

где

$$(19)\qquad \hat{\mathbf{w}}[n-m] = \tfrac{1}{2}[\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{w}[n-m] + \mathbf{w}[m-n]\,\mathbf{K}^{\varkappa}]\,.$$

Из (5), используя формулу обращения [1], имеем

$$\mathbf{w}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-j\pi}^{j\pi}\mathbf{W}^*(j\varpi)\,e^{j\varpi n}\,d\varpi\,,$$

в значит, учитывая (19)

$$(20)\qquad \hat{\mathbf{w}}[n-m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-j\pi}^{j\pi}\tfrac{1}{2}\{\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{W}^*(j\varpi) + \mathbf{W}^{*T}(-j\varpi)\,K^{\varkappa}\}\,e^{j\varpi(n-m)}\,d\varpi\,.$$

 Подставляя (20) в (18), после очевидных преобразований получаем

$$(21)\quad \Gamma_{\varkappa}(N) = \frac{1}{2\pi}\int_{-j\pi}^{j\pi} \sum_{n,m=0}^{N} \boldsymbol{\Psi}^{T}(n)\left[\tfrac{1}{2}\{\mathbf{K}^{\varkappa}\,\mathbf{W}^{*}(j\bar{\omega}) + \mathbf{W}^{*T}(-j\bar{\omega})\,\mathbf{K}^{\varkappa}\} + \mathbf{K}^{\varkappa-1}\right]\overline{\boldsymbol{\Psi}(m)}\,d\bar{\omega}\,,$$

где

$$(22)\qquad \boldsymbol{\Psi}(n) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}[n], n)\, e^{j\bar{\omega}n}\,.$$

Это условие будет выполняться, если эрмитова матрица (внутри квадратных скобок) будет положительно определенной (см. например, [5]), что и приводит к условию (4). Установленный критерий без труда обобщается на случаи: дополнительных ограничений, налагаемых на характеристики нелинейных элементов, [7], устойчивости процессов [8] и т. п. Мы здесь этих обобщений касаться не будем. Отметим лишь одну особенность приведенного критерия абсолютной устойчивости многосвязных систем. Каждому значению $\varkappa$ соответствуют свои условия устойчивости. К сожалению задача определения $\varkappa$, при котором получаются наиболее широкое условия устойчивости данной системы, связана со значительными вычислительными трудностями.

(Поступило 24 июня 1965 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. З. Цыпкин: Теория линейных импульсных систем. Москва 1963.
[2] Я. З. Цыпкин; ДАН (1962) № 1, 145.
[3] Е. И. Джури, Б. В. Ли; Автоматика и Телемеханика 26 (1965) № 5.
[4] A. Halanay; C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258 (1964).
[5] Ю. А. Розанов: Стационарные случайные процессы. Москва 1963.
[6] E. Jury, B. Lee; IEEE Trans. on Automatic Cont. AC-9 (1964), N 1.
[7] Я. З. Цыпкин; ДАН (1964) № 5, 1955.
[8] Я. З. Цыпкин: ДАН (1963) № 2, 1962.

Kritérium absolutní stability impulsových mnohoparametrových soustav s nestacionární charakteristikou nelineárních prvků

JA. Z. CYPKIN, M. S. EPEL'MAN

V článku se definuje zcela obecné frekvenční kritérium stability impulsových mnohoparametrových soustav s nestacionárními charakteristikami nelineárních prvků. Použití zobecněné Bochnerovy věty a elementárních pojmů funkcionální analýzy dovolilo podat jeho velmi jednoduchý důkaz.

Formulované kritérium zahrnuje jako zvláštní případy i kritéria stability mnohoparametrových impulsových soustav se stacionárními i nestacionárními charakteristikami nelineárních prvků, která byla odvozena v předchozích pracích.

Яков Зальманович Цыпкин, доктор технических наук, профессор; Михаил Самуилович Эпельман, инженер, Институт автоматики и телемеханики АН СССР, Каланчевская 15а, Москва И-53, СССР.