KYBERNETIKA ČÍSLO 5, ROČNÍK 1/1965

Feststellung des Kontrollintervalls und des Stichprobenplanes für die Diagramme gut-schlecht

ZDENĚK KOUTSKÝ

Die Produktion wird als eine Markovsche Kette mit zwei Zuständen aufgefasst. Dieses mathematische Modell ermöglicht die Feststellung des besten Kontrollintervalls und des besten Stichprobenplanes — hinsichtlich verschiedener Kriterien.

0. EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG

Das Prinzip von Kontrolldiagrammen „gut-schlecht", die in der Praxis schon läufig benützt werden, ist einfach und bekannt. Bei Anwendung dieser Diagrammen muss man zuerst ein Zeitintervall wählen, der als Kontrollintervall bezeichnet wird. Am Ende dieses Intervalls entnimmt man n Stücke (Umfang der Stichprobe) aus der Produktion und wenn in dieser Stichprobe mehr als c schlechte Stücke wird, muss man die Produktion einstellen und einen Fehler an der Maschine suchen. Wenn in dieser Stichprobe die Anzahl schlechter Stücke kleiner als c ist, setzt die Produktion fort.

Dabei ist die Bestimmung der Länge eines Kontrollintervalls mehr eine Frage von Erfahrungen als eine Frage des Ergebnisses exakter Erwägungen, die sich ein im voraus gegebenes Ziel setzen. Z.B. wenn wir die Zeitintervalle zwischen nacheinanderfolgenden zwei Störungen einer Maschine kennen, wählen wir die Hälfte oder das Drittel des durchschnittlichen oben erwähnten Zeitintervalls zwischen nacheinanderfolgenden Störungen als die Länge des Kontrollintervalls.

Obwohl schon für die Bestimmung des Stichprobenplanes gewisse Methoden zur Verfügung stehen, wurde die Frage gleichzeitiger Bestimmung beider Grössen (d.h. des Kontrollintervalls und Stichprobenplanes) noch nicht befriedigend gelöst.

In dieser Arbeit haben wir zur Lösung des behandelten Problems folgendes Modell aufgebaut:

($V\,1$) Die Maschine kann sich in zwei Zuständen befinden — in einem guten (dann produziert sie Ausschuss mit der Wahrscheinlichkeit p_1) und in einem schlechten (dann produziert sie Ausschluss mit der Wahrscheinlichkeit $p_2 > p_1$).

($V\,2$) Am Anfang ist die Maschine in gutem Zustand.

($V\,3$) Während der Produktion kann die Maschine mit gegebener Wahrscheinlichkeit aus dem guten in den schlechten Zustand übergehen, aber sie kann sich nicht aus diesem in den guten zurückkehren.

($V\,4$) Diese Wahrscheinlichkeit hängt von dem Zustand dagegen überhaupt nicht von der Vergangenheit der Produktion, ab.

($V\,5$) Die Erzeugung weder eines schlechten noch eines guten Stückes beeinflusst den Übergang aus dem guten in den schlechten Zustand.

Die Produktion läuft also wie folgt. Zuerst produziert man den nullten Stück (X_0), der immer gut ist und wir werden voraussetzen, dass die Maschine in diesem Augenblick im guten Zustand ist.

($V\,6$) Dann produziert man zuerst N Stücke ($X_1, X_2, \ldots, X_N$). Diesen Produktionsabschnitt bezeichnen wir als eine Produktionsetappe.

($V\,7$) Nach diesen noch n Stücke ($N_{N+1}, X_{N+2}, \ldots, X_{N+n}$), die für die Kontrolle bestimmt sind. Diesen Produktionsabschnitt bezeichnen wir als eine Kontrolletappe.

($V\,8$) Das Resultat dieser Stichprobe entscheindet über die Produktion – wenn wir die Produktion als gut einschätzen, läuft diese weiter ($X_{N+n+1}, \ldots$) – in entgegensetzten Falle wird die Produktion eingestellt und an der Maschine wird ein Fehler gesucht bzw. wird die Maschine repariert. Der Produktionsprozess beginnt dann wiederum aus einem guten Zustand ($X_0, X_1, \ldots$). Das Zeitintervall zwischen zwei nacheinanderfolgenden Einstellen der Produktion nennen wir ein Produktionszyklus und es ist eine Zufallsgrösse.

Wir wollen für die Wahl des Kontrollintervalles und des Stichprobenplanes folgende Kriterien (**K 1** – **K 9**) benützen.

(**K1**): Der durchschnittliche Ausschussprozentsatz soll kleiner als eine im voraus vorgeschriebene Zahl sein.

Wir beseitigen Ausschuss, der in allen Stichproben sowie auch bei der 100%-tigen Kontrolle der abgelehnten Abschnitte der Produktion gefunden wird. (In diesem Falle kontrollieren wir alle Stücke, die in einem Kontrollintervall produziert werden, in dem die Produktion als schlecht abgeschätzt wird). So entsteht ein durchschnittlicher Ausschussprozentsatz, den wir als durchschnittlicher durchgelassener Ausschussprozentsatz bezeichnen.

(**K2**): Der gerade oben angeführte Ausschussprozentsatz soll kleiner als eine im voraus vorgeschriebene Zahl sein.

In weiteren Kriterien (**K3**) – (**K8**) sollen folgende Summen in Bezug auf einen guten Stück minimalisiert werden.

(**K3**): Die Summe der Kosten für Ausschuss und Kontrolle.

(**K4**): Die Summe der Kosten für Ausschuss, Kontrolle und Reparatur der Maschine bei der Einstellen des Produktionsprozesses.

(**K5**): Dieselbe Summe wie im (**K4**), aber wir unterscheiden die Kosten, die bei der Reparatur der Maschine in gutem oder in schlechtem Zustand entstehen.

(**K6 – K8**): Dieselbe Summen wie in (**K3 – K5**), die aber um die durch den durchgelassenen Ausschuss verursachteten Kosten, vergrössert werden.

(**K9**): Die Anzahl kontrollierter Stücke in allen Stichproben und bei der 100%-tigen Kontrolle der abgelehnten Abschnitte der Produktion soll minimal sein.

1. BEZEICHNUNG UND MATHEMATISCHES MODELL

Zuerst führen wir einige wichtigere Bezeichnungen ein. Es ist möglich, dass der genauere Sinn irgendeiner Grössen erst später erklärt wird.

a	Wahrscheinlichkeit dass die Maschine in gutem Zustand bleibt,
K	Kosten für die Reparatur der Maschine (rücksichtlos, ob sie in gutem oder schlechtem Zustand ist),
K_1	Kosten für die Kontrolle der Maschine, die als schlecht bezeichnet wird, obwohl in gutem Zustand ist,
K_2	Kosten für die Reparatur der Maschine, die wirklich in schlechten Zustand ist,
n	Länge einer Kontrolletappe,
N	Länge einer Produktionsetappe,
(n, c)	Stichprobenplan,
$N + n$	Länge eines Kontrollintervalls,
p_1	Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine, die im guten Zustand ist, Ausschuss produziert,
p_2	Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine, die im schlechten Zustand ist, Ausschuss produziert,
T	Produktionszyklus (Zufallsgrösse) in Kontrollintervall – Einheiten ausgedrückt, d.h. T Kontrollintervalle,
$\overline{T} = E(T)$	Mittelwert der Zufallsgrösse T,
T_G, T_S	Zeit, die die Markovsche Kette Y im Zustand GF (bzw. SF) verbringt, vorausgesetzt, dass aus dem Zustand GF ausgegangen ist,

$$\overline{T}_G = E(T_G)\,, \quad \overline{T}_S = E(T_S)\,,$$

$W(E/G)$	Wahrscheinlichkeit, dass die Produktion im guten Zustand eingestellt wird,
$W(E/S)$	Wahrscheinlichkeit, dass die Produktion im schlechten Zustand eingestellt wird,
$\bar{z}_1$	durchschnittlicher produzierter Ausschussprozentsatz,
$\bar{z}_2$	durchschnittlicher durchgelassener Ausschussprozentsazt,
$\overline{Z}_1$	durchschnittliche Ausschussanzahl in $\overline{T}$,
$\overline{Z}_2$	durchschnittliche durchgelassene Ausschussanzahl in $\overline{T}$,

$\bar{Z}_G^{(N+n)}$ durchschnittliche Ausschussanzahl in einem Intervall vom Typ 1 der Länge $N + n$,

$\bar{Z}_S^{(N+n)}$ durchschnittliche Ausschussanzahl in einem Intervall vom Typ 3 der Länge $N + n$,

$\bar{Z}_U^{(N+n)}$ durchschnittliche Ausschussanzahl in einem Intervall vom Typ 2 der Länge $N + n$,

$\varkappa$ Kosten für die Kontrolle eines Stückes. Weiter werden wir immer $\varkappa = 1$ voraussetzen, d.h. alle Kosten werden in $\varkappa$-Einheiten gemessen,

μ Verluste, die ein durchgelassener schlechter Stück verursacht,

v Kosten für einen schlechten Stück,

$\{G, S\}$ Menge von Zuständen der Produktion,

$\{GF, SF, GE, SE\}$ Menge von Zuständen Markovscher Ketten X_i, Y_i,

$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine die einfache Produktion beschreibende Markovsche Kette,

$\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine die Produktion mit den Entscheidungen beschreibende Markovsche Kette.

Jetzt kennen wir schon alle unsere Kriterien **(K1)**–**(K9)** rein mathematisch definieren:

(K1) $$\bar{z}_1 \leqq p\,, \text{ wobei } p_1 < \bar{z}_1 \leqq p < p_2 \text{ ist}\,,$$

(K2) $$\bar{z}_2 \leqq p\,.$$

Wir sollen folgende Ausdrücke, die wir noch durch $\bar{T}(N + n)(1 - \bar{z}_1)$ dividieren müssen, minimalisieren:

(K3) $\bar{T}(N + n)\, v\bar{z}_1 + \bar{T}n\,,$
(K4) $\bar{T}(N + n)\, v\bar{z}_1 + \bar{T}n + K\,,$
(K5) $\bar{T}(N + n)\, v\bar{z}_1 + \bar{T}n + W(E/G)\, K_1 + W(E/S)\, K_2\,,$
(K6) $\bar{T}(N + n)\, v\bar{z}_1 + \bar{T}(N + n)\, \mu\bar{z}_2 + \bar{T}n + N\,,$
(K8) $\bar{T}(N + n)\, v\bar{z}_1 + \bar{T}(N + n)\, \mu\bar{z}_2 + \bar{T}n + N + K\,,$
(K8) $\bar{T}(N + n)\, v\bar{z}_1 + \bar{T}(N + n)\, \mu\bar{z}_2 + \bar{T}n + N + W(E/G)\, K_1 + W(E/S)\, K_2\,,$
(K9) $\bar{T}n + N$ (ohne Dividieren durch $\bar{T}(N + n)(1 - \bar{z}_1)$).

Also jetzt ist die Hauptsache alle oben angeführten Grössen festzustellen.

Dazu benützen wir folgendes mathematisches Modell. Die Produktion wird als Markovsche Kette mit zwei Zuständen (G – gut, S – schlecht) und einer Übergangsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ G \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

aufgefasst. Das entspricht, wie wir uns ohne Schwierigkeiten überzeugen können, unseren oben angeführten Vorausssetzungen $(V1)$–$(V5)$. Wir müssen aber in unsere Betrachtungen auch die Tatsache einschliessen, dass wir nach jedem $k(N + n)$-

ten Schritt ($k = 1, 2, \ldots$) entscheiden, ob die Produktion eingestellt werden oder fortsetzen soll $(V6)-(V8)$. Dann genügt unser einfaches Modell schon nicht mehr. Zuerst müssen wir die Menge der Zustände unseres Prozesses um weitere vergrössen.

1) Zustände GF (bzw. GE): Die Maschine ist in gutem Zustand und die Produktion soll fortsetzen (bzw. eingestellt werden).
2) Zustände SF (bzw. SE): Die Maschine ist im schlechten Zustand und die Produktion soll fortsetzen (bzw. eingestellt werden). Aber die Zustände GF und SF stimmen mit den früher beschriebenen Zuständen G und S überein. Dadurch wird die Menge der Zustände unseres Prozesses auch $\{GF, GE, SF, SE\}$ vollständig definiert.

In beiden Produktionsabschnitten eines Kontrollintervalls (in der Produktionsetappe und Kontrolletappe) ist unser Prozess qualitativ wesentlich verschieden – unser Prozess, ist nicht homogen. Deshalb bestimmen wir zwei Übergangsmatrizen, die die beide oben angeführten Etappen charakterisieren. Dabei nützen wir folgenden, gut bekannten Satz aus:

Satz: *Wenn eine Folge $\{X_i\}_{j=1}^{\infty}$ eine homogene Markovsche Kette mit einer Übergangsmatrix $\mathbf{B}$ bildet, dann bildet die ausgewählte Folge $\{X_{kN+1}\}_{k=0}^{\infty}$ auch eine homogene Markovsche Kette mit einer Übergangsmatrix $\mathbf{B}^N$.*

Die Übergangsmatrix für einen Schritt in der Produktionsetappe wird durch

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ GF \\ SF \\ GE \\ SE \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} GF & SF & GE & SE \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2}$$

angegeben, wie uns leicht überzeugen können.

Die ganze Kontrolletappe fassen wir als ein Schrit, auf, der allgemein durch die Übergangsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \\ GF \\ SF \\ GE \\ SE \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} GF & SF & GE & SE \end{array} \\ \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ 0 & q_{22} & 0 & q_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3}$$

charakterisiert werden kann.

Nach dem Satz, wenn wir eine ganze Produktionetappe als ein Schritt eines Prozesses Y' auffassen, bekommen wir für diesen Schritt eine Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^N = \mathbf{B}^N . \tag{4}$$

Durch die Übergangsmatrizen **P** und **Q**, durch die Menge der Zustände $\{GF, SF, GE, SE\}$ und durch die Anfangverteilung, die mit Hilfe $(V2)$ angegeben wird, wird eine neue nichthomogene Markovsche Kette $Y_1', Y_2', Y_3', \ldots$ vollständig definiert.

Die ausgewählte Folge $Y_2', Y_4', \ldots$, die wir als $\{Y_i\}_{j=1}^{\infty}$ bezeichnen, ist schon eine homogene Markovsche Kette und hat die Übergangsmatrix S

$$(5)\qquad \mathbf{S} = \mathbf{PQ} = \begin{array}{c} \\ GF \\ SF \\ GE \\ SE \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} GF & SF & GE & SE \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11}q_{11} & p_{11}q_{12} + p_{12}q_{22} & p_{11}q_{13} & p_{11}q_{14} + p_{12}q_{24} \\ 0 & q_{22} & 0 & q_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. ANALYSE DES MATHEMATISCHEN MODELLS

Vor allem zeigt eine einfache Analyse, dass die Zustände GE und SE absorbierende, dagegen GF, SE transitive Zustände des Prozesses $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sind. Wir bestimmen also den mittleren Produktionszyklus, die mittlere Zeit, die die Produktion braucht um einen von den absorbierenden Zuständen zu erreichen. Nach [1] streichen wir aus der Matrix **S**, die durch (5) definiert ist, die den absorbierenden Zuständen GE und SE entsprechenden Spalten und Zeilen, aus. Dadurch entsteht eine Matrix **R**

$$(6)\qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} p_{11}q_{11} & p_{11}q_{12} + p_{12}q_{22} \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}.$$

Dann bestimmen die Elemente t_{ij} der Matrix **T**

$$(7)\qquad \mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$$

(**I** ist eine Einheitsmatrix), die mittlere Zeit $\overline{T}_G$ (bzw. $\overline{T}_S$), die die Markovsche Kette $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ in den Zuständen j ($j = GF$, bzw. SF) verbringt, vorausgesetzt, dass sie aus einem Zustand i ($i = GF, SF$) ausgegangen ist. Wir bekommen zuerst ($i = GF$) für $\overline{T}_G$ und $\overline{T}_S$

$$(8)\qquad \overline{T}_G = \frac{1}{1 - p_{11}q_{11}}; \quad \overline{T}_S = \frac{p_{11}q_{12} + p_{12}q_{22}}{(1 - p_{11}q_{11})(1 - q_{22})}.$$

und dann, weil $\overline{T} = \overline{T}_G + \overline{T}_S$ gilt,

$$(9)\qquad \overline{T} = \frac{1 + p_{11}(q_{12} - q_{22})}{(1 - p_{11}q_{11})(1 - q_{22})}.$$

Weiter, wieder nach [1] oder (in unserem einfachen Fall) direkt, rechnen wir die Wahrscheinlichkeiten $W(E/G)$ (bzw. $W(E/S)$), dass die Produktion in dem Zustand GE ((bzw. SE) endet, aus. Es gilt nämlich für die Wahrscheinlichkeit, dass die Produktion nach i-tem Kontrollintervall in GE endet,

$$(10) \qquad W^{(i)}(E/G) = p_{11}^{i} q_{11}^{i-1} q_{13}\,,$$

so dass

$$(11) \qquad W(E/G) = \sum_{j=1}^{\infty} W^{(i)}(E/G) = \frac{p_{11}q_{13}}{1 - p_{11}q_{11}}$$

und

$$(12) \qquad W(E/S) = 1 - W(E/G) = \frac{p_{11}(q_{12} + q_{14}) + p_{12}}{1 - p_{11}q_{11}}\,.$$

Jetzt bezeichnen wir die durchschnittliche in einem Intervall der Länge $N + n$ produzierte Anzahl schlechter Stücke

1) mit $\bar{Z}_G^{(N+n)}$, wenn die Produktion genau vor dem Anfang sowie am Ende des Intervalls im guten Zustand (G) ist. (Zeitintervall vom Typ 1)
2) mit $\bar{Z}_U^{(N+n)}$, wenn die Produktion genau vor dem Anfang des Intervalls in gutem und am Ende im schlechten Zustand ist (Zeitintervall vom Typ 2)
3) mit $\bar{Z}_S^{(N+n)}$, wenn die Produktion genau vor dem Anfang sowie am Ende des Intervalls im schlechten Zustand ist (Zeitintervall vom Typ 3).

Dann wird der durchschnittlich produzierte Ausschussprozentsatz $\bar{z}_1$ durch

$$(13) \quad \bar{z}_1 = \{[W(E/G) + (\bar{T}_G - 1)]\, \bar{Z}_G^{(N+n)} + W(E/S)\, \bar{Z}_U^{(N+n)} + \bar{T}_S \bar{Z}_S^{(N+n)}\} : \bar{T}(N+n)$$

angegeben. Während eines mittleren Produktionszyklus verbringt nämlich der Produktionsprozess durchschnittlich $\bar{T}_G$ Kontrollintervalle im Zustand GF und $\bar{T}_S$ Kontrollintervalle im Zustand SF. Aber aus den $\bar{T}_G$ Kontrollintervallen müssen wir ein Kontrollintervall ausschliessen, denn dieses Kontrollintervall mit der Wahrscheinlichkeit $W(E/S)$ ein Kontrollintervall vom Typ 2 und mit der Wahrscheinlichkeit $W(E/G)$ ein Kontrollintervall vom Typ 1 ist.

Nach Einsetzen aus (8), (9), (11), (12) in (13) bekommen wir $\bar{z}_1$ mit den Elementen der Matrizen $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$

$$(14) \quad \bar{z}_1 = [\{p_{11}(q_{11} + q_{13})\, \bar{Z}_G^{(N+n)} + [p_{11}(q_{12} + q_{14}) + p_2]\, \bar{Z}_U^{(N+n)}\}\,(1 - q_{22}) + \\ + (p_{11}q_{12} + p_{12}q_{22})\, \bar{Z}_S^{(N+n)}] : [1 + p_{11}(q_{12} - q_{22})]\,(N + n)\,.$$

Es bleibt noch übrig, die Werte von $p_{11}, p_{12}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{22}, \bar{Z}_G^{(N+n)}, \bar{Z}_U^{(N+n)}, \bar{Z}_S^{(N+n)}$ durch die a, c, n, N auszudrücken.

Aus (4) bekommen wir unmittelbar

$$(15) \qquad p_{11} = a^N\,, \quad p_{12} = 1 - a^N\,.$$

Die Bestimmung der Werte $q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{22}, q_{24}$ hängt eng mit der Aufgabe der Feststellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung Markovscher Kette mit einer Übergangsmatrix $\boldsymbol{V}$ nach n Schritten zusammen. Diese Kette hat folgende Zustände:

$G_0, G_1, \dots, G_n, S_0, S_1, \dots, S_n$, wobei wir mit G_i folgenden Zustand bezeichnen: Die Produktion ist im guten Zustand und es werden i schlechte Stücke gefunden.

Wenn diese Kette z.B. im Zustand G_i $(i \neq n)$ ist, dann kann sie beim nächsten Schritt in folgende vier Zustände übergehen:

im Zustand	die Produktion	ein schlechter Stück	die Wahrscheinlichkeit
G_i	bleibt im guten Zustand	wird nicht gefunden	$a(1-p_1)$
G_{i+1}	bleibt im guten Zustand	wird gefunden	ap_1
S_i	geht im schlechten Zustand über	wird nicht gefunden	$(1-a)(1-p_2)$
S_{i+1}	geht im schlechten Zustand über	wird gefunden	$(1-a)\,p_2$

und ganz ähnlich in anderen Zuständen. Dann hat $\mathbf{V}$ folgende Form:

$$\mathbf{V} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} G_0 & G_1 & G_2 & & G_n & S_0 & S_1 & & S_n \end{array} \\ \begin{array}{c} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \\ S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{array} & \begin{pmatrix} a(1-p_1) & ap_1 & 0 & \dots & 0 & (1-a)(1p-_2) & (1/a)\,p_2 & \dots & 0 \\ 0 & a(1-p_1) & ap_1 & \dots & 0 & 0 & (1-a)(1-p_2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a(1-p_1) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & \dots & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-p_2 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{16}$$

Dann gilt es

$$\begin{gathered} q_{11} = \sum_{i=0}^{c} v^{(n)}_{G_0G_i}\,; \quad q_{12} = \sum_{i=0}^{c} v^{(n)}_{G_0S_i}\,; \quad q_{13} = \sum_{i=C+1}^{n} v^{(n)}_{G_0G_i}\,; \\ q_{14} = \sum_{i=C+1}^{n} v^{(n)}_{G_0S_i}\,; \quad q_{22} = \sum_{i=0}^{c} v^{(n)}_{S_0S_i}\,; \quad q_{24} = \sum_{i=C+1}^{n} v^{(n)}_{S_0S_i} \end{gathered} \tag{17}$$

wobei $v^{(n)}_{i,j}$ ein Element der Matrix $\mathbf{V}^{(n)}$ ist.

Obwohl die Ausdrücke für q_{11} usw. keine analytische Form, wie wir gewöhnt sind, haben, doch ist gerade diese Form für das Rechnen auf der Rechenmaschine sehr gut geeignet. Es handelt sich um Potenzieren von Matrizen. Selbstverständlich brauchen wir nicht immer die Zustände bis G_n wählen, sondern nur bis gewisse G_d

($d > c$). Dadurch wird die Matrixdimension sehr verkleinert. (Wir haben $d = 6$ gewählt).

Ohne Schwierigkeiten können wir für q_{12} die analytischen Ausdrücke schreiben. Es gilt

$$q_{22} = \sum_{i=0}^{c} \binom{n}{i} (1 - p_2)^{n-i} p_2^i \tag{18}$$

und für

$$\begin{aligned} q_{11} &= a^n \sum_{i=0}^{c} \binom{n}{i} (1 - p_1)^{n-i} p_1^i , \\ q_{13} &= a^n - q_{11} . \end{aligned} \tag{19}$$

Die im Anhang stehende Tabelle bringt die Werte von q_{11} für verschiedene a, p_1, p_2, die auf der Rechenmaschine Ural II gerechnet wurden.

Weiter bekommen wir noch

$$\begin{aligned} q_{11} + q_{13} = a^n , \quad q_{12} + q_{14} = 1 - a^n , \\ p_{11}(q_{12} + q_{14}) + p_{12} = 1 - a^{N+n} \end{aligned} \tag{20}$$

denn z.B. die erste Beziehung die Tatsache bezeichnet, dass die Produktion während der Kontrolletappe im guten Zustand bleibt.

Es bleibt noch übrig die Werte $\bar{Z}_G^{(N+n)}$, $\bar{Z}_U^{(N+n)}$, $\bar{Z}_S^{(N+n)}$ zu bestimmen. Es gilt

$$\bar{Z}_G^{(N+n)} = (N + n)\, p_1 ; \quad \bar{Z}_S^{(N+n)} = (N + n)\, p_2 \tag{21}$$

und weiter

$$\bar{Z}_U^{(N+n)} = \frac{1}{1 - a^{N+n}} \sum_{j=1}^{N+n} (1 - a)\, a^{N+n-j} [(N + n - j)\, p_1 + j p_2] , \tag{22}$$

denn die Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Anzahl schlechter Stücke $[(N + n - j)\, p_1 + j p_2]$ erscheint, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass die Produktion $N + n - j$ Schritte in gutem Zustand bleibt und dann in schlechten übergeht. Die Wahrscheinlichkeit ist gleich $a^{N+n-j}(1 - a)$. Nach Addieren beider Reihen bekommen wir

$$\bar{Z}_U^{(N+n)} = a \frac{p_1 - p_2}{1 - a} + \frac{(N + n)(p_2 - p_1 a^{N+n})}{1 - a^{N+n}} . \tag{23}$$

Durch Einsetzen (15), (20), (21), (23) in (14) bekommen wir

$$\bar{z}_1 = \frac{\left[p_2 + (p_1 - p_2) \dfrac{a}{N + n} \dfrac{1 - a^{N+n}}{1 - a} \right] (1 - a_{22}) + p_2 [q_{22} + a^N (q_{12} - q_{22})]}{1 + a^N (q_{12} - q_{22})} . \tag{24}$$

 Diese Formel (24) erlaubt und mit dem Benützen der Tabelle die Berechnung des durchschnittlichen Ausschussprozentsatz.* Für kleine q_{12} und q_{22} (das entspricht meistens auch unseren Forderungen) oder zum Abschätzen können wir die Formel

$$\bar{z}_1 \approx p_2 + (p_1 - p_2)\frac{a}{N+n}\frac{1-a^{N+n}}{1-a}$$

benutzen.

Wenn wir (15) und (20) in (11) (bzw. in (12)) einsetzen, dann bekommen wir

$$W(E/S) = \frac{1-a^{N+n}}{1-a^N q_{11}}. \tag{25}$$

Für den speziellen Fall $c = 0$ bekommen wir aus (17)

$$q_{11} = a^n(1-p_1)^n\,; \quad q_{12} = (1-p_2)^n \alpha\,, \quad \text{wobei} \quad \alpha = \frac{1 - a^n \dfrac{(1-p_1)^n}{(1-p_2)^n}}{1 - a\dfrac{1-p_1}{1-p_2}}, \tag{26}$$

$$q_{13} = a^n - q_{11}\,; \quad q_{14} = 1 - a^n - q_{12}\,,$$

$$q_{22} = (1-p_2)^n\,, \quad q_{24} = 1 - q_{22}\,.$$

In diesem speziellen Fall hat (24) (bzw. (25)) folgende Form

$$\bar{z}_1 = \tag{27}$$
$$= \frac{\left[p_2 + (p_1 - p_2)\dfrac{a}{N+n}\dfrac{1-a^{N+n}}{1-a}\right][1-(1-p_2)^n] + (1-p_2)^n p_2[a^N(\alpha-1)+1}{1+(1-p_2)^n a^N(\alpha-1)}$$

und

$$W(E/S) = \frac{1-a^{N+n}}{1-a^{N+n}(1-p_1)^n}. \tag{28}$$

Nach dieser Formel haben wir einige Kurven für $\bar{z}_1$ für $n = 10, 20, 50$ und $a = 0{,}999$ auf der Rechenmaschine Ural I berechnet.

Wenn noch $p_2 = 1$, dann gilt

$$\bar{z}_1 = 1 - (1-p_1)\frac{a}{N+n}\frac{1-a^{N+n}}{1-a}, \tag{29}$$

* Der Fall $p_2 = 1$ wurde unabhängig von dieser Arbeit im [3] gelöst. Die Autoren sind aus einem anderen Modell ausgegangen und mittels einer anderen Methode der Lösung haben für diesen Fall einige weitere Resultate gewonnen.

$$\overline{T} = \frac{1}{1 - a^{N+n}(1 - p_1)^n}.$$

Weiter berechnen wir den durchschnittlichen durchgelassenen Ausschussprozentsatz $\bar{z}_2$. Zuerst bekommen wir für $\overline{Z}_2$

$$(30)\quad \begin{aligned} \overline{Z}_2 = {} & \overline{T}(N + n)\,\bar{z}_1 - (\overline{T}_G - 1)\,np_1 - W(E/G)\,np_1 - W(E/S)\,Z_U^{*(n)} - \\ & - \overline{T}_S np_2 - W(E/G)\,Np_1 - W(E/S)\,[1 - (p_{11}q_{12} + p_{12}q_{22})]\,Z_U^{*(N)} - \\ & - W(E/S)\,(p_{11}q_{12} + p_{12}q_{22})\,Np_2 = \overline{T}(N + n)\,\bar{z}_1 - Z_g, \end{aligned}$$

wobei der erste Summand in (30) ein Mittelwert der Ausschussanzahl in einem mittleren Produktionzyklus ist.

Der $\left\{\begin{matrix}\text{zweite und dritte (bzw. vierte oder fünfte)}\\ \text{sechste (bzw. siebente oder achte)}\end{matrix}\right\}$ Summand ist ein Mittelwert

der Ausschussanzahl, die $\left\{\begin{matrix}\text{bei den Stichproben}\\ \text{durch die 100\%-tige Kontrolle}\end{matrix}\right\}$ der Produktion

in der $\left\{\begin{matrix}\text{Kontrolletappe}\\ \text{Produktionsetappe}\end{matrix}\right\}$ gefunden wird, vorausgesetzt, dass es sich um ein

Kontrollintervall vom Typ 1 (bzw. 2 oder 3) handelt.

Jetzt bestimmen wir noch $Z_U^{*(N)}$ (bzw. $Z_U^{*(N)}$), also die mittlere Ausschussanzahl in der Produktionsetappe (bzw. Kontrolletappe), vorausgesetzt, dass es sich um ein Kontrollintervall vom Typ 2 handelt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Produktion schon während (erst nach) der Produktionsetappe in den schlechten Zustand übergeht, durch $(1 - a^N)/(1 - a^{N+n})$ (bzw. $a^N \,.\, (1 - a^n)/(1 - a^{N+n})$) angegeben. Deshalb produziert man in der Produktionsetappe $Z_U^{(N)}$ schlechte Stücke mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - a^N)/(1 - a^{N+n})$ und Np_1 schlechte Stücke mit der Wahrscheinlichkeit $a^N(1 - a^n)/(1 - a^{N+n})$. Dann ist

$$(31)\quad Z_U^{*(N)} = \frac{a^N(1 - a^n)\,Np_1}{1 - a^{N+n}} + \frac{1 - a^N}{1 - a^{N+n}}\left[a\,\frac{p_1 - p_2}{1 - a} + \frac{N(p_2 - p_1 a^N)}{1 - a^N}\right].$$

Ganz ähnlich bekommen wir für $Z_U^{*(n)}$

$$(32)\quad Z_U^{*(n)} = \frac{(1 - a^N)\,np_2}{1 - a^{N+n}} + \frac{a^N(1 - a^n)}{1 - a^{N+n}}\left[a\,\frac{p_1 - p_2}{1 - a} + \frac{n(p_2 - p_1 a^n)}{1 - a^n}\right].$$

Bemerkung. In dem zweiten und dritten Summand vom (30) haben wir einen unbedingten Mittelwert der Ausschussanzahl benützt, obwohl wir ein durch die Annahme oder Ablehnung der Produktion bedingten Mittelwert benützen sollen. Aber, wie uns leicht überzeugen können, gilt es zuerst

$$(33) \qquad \frac{W(E/G)}{W(E/G) + \overline{T}_G - 1} = \frac{q_{13}}{q_{11} + q_{13}}.$$

Dabei ist $(q_{13})/(q_{11} + q_{13})$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Produktion, die im guten Zustand ist, abgelehnt wird. Es gilt weiter

$$(34) \qquad \frac{q_{13}}{q_{11} + q_{13}} = \sum_{i=0}^{c} \pi :$$

wobei π_i eine Wahrscheinlichkeit ist, dass wir in einer Stichprobe gerade i schlechte Stücke finden. Wenn wir mit $p_{1/L}$ (bzw. $p_{1/A}$) den durch Ablehnung (bzw. Annahme) bedingter Ausschussprozentsatz bezeichnen, dann ist

$$(35) \qquad p_{1/L} = \frac{\sum_{i=C+1}^{n} i\pi_i}{\sum_{i=C+1}^{n} \pi_i}, \quad p_{1/A} = \frac{\sum_{i=0}^{c} i\pi_i}{\sum_{i=0}^{c} \pi_i}$$

und weiter

$$\sum_{i=0}^{c} \pi_i p_{1/A} + \sum_{i=C+1}^{n} \pi_i p_{1/L} = p_1 ,$$

so dass alles in Ordnung ist.

Für $\bar{z}_2$ bekommen wir

$$(36) \qquad \bar{z}_2 = \frac{z_1}{\overline{T}(N + n) - Zg}.$$

Die Beziehungen (9), (24), (25), (30)–(31), (36) bestimmen jetzt alle nötige Grössen, die wir für die Auswertung der Kriterien (**K1**)–(**K9**) brauchen.

Eine exakte Lösung aller Probleme ist wegen komplizierter Formeln nicht möglich. Deshalb in einem konkreten Beispiele ist es nötig, ein „genügend dichtes Netz" für die oben angeführten Grössen auszurechnen und dann die günstigsten N, n, c zu wählen. Dazu dienen auch unsere Tabellen, die (obwohl für mehrere Werte ausgerechnet werden) nur in einer Auswahl publiziert werden.

3. BEISPIEL

Jetzt behandeln wir folgendes Beispiel: $a = 0{,}999$; $p_1 = 0$, $p_2 = 1$. Für diesen Fall ist am besten den Stichprobeplan (1, 0) zu wählen. Nach (26) sichert er nämlich $q_{11} = a^n$, $q_{14} = 1 - a^n$, $q_{12} = q_{13} = q_{22} = 0$, $q_{24} = 1$; also nach (24) die günstigste Werte, die wir erzielen können.

Nach (27), (29) und (36) gilt es

$$(37) \qquad W(E/G) = 0\,, \quad W(E/S) = 1\,,$$

$$\overline{T} = \overline{T}_G = 1 : (1 - a^{N+1})\,; \quad \overline{T}_S = 0\,,$$

$$(38) \qquad \bar{z}_1 = 1 - \frac{a}{1-a}\,\frac{1-a^{N+1}}{N+1}\,; \quad \bar{z}_2 = 0\,.$$

Da $W(E/G) = 0$ stimmt (**K4**) mit (**K5**) und (**K7**) mit (**K8**) überein. Das Kriterium (**K2**) ist wegen $\bar{z}_2 = 0$ immer erfüllt.

In diesem einfachen Falle hängen alle Resultate nur von der Wahl der Länge eines Kontrollintervalls ab. Dagegen die Anzahl der guten Stücke ist ganz unabhängig von der Wahl des Kontrollintervalls. Diese Anzahl ist nämlich gleich

$$(39) \qquad \overline{T}(N+1)(1-\bar{z}_1) = \frac{a}{1-a}\,,$$

wie aus (37) und (38) hervorgeht.

Jetzt schätzen wir unser Prozess von Standpunkten der Kriterien (**K1**)–(**K9**) ab.

Für das Kriterium (**K1**) rechnen wir z_1 für verschiedene Werte $N + 1$ aus. Die Resultate werden in dieser Tabelle angegeben:

$N+1$	$\bar{z}_1$	$N+1$	$\bar{z}_1$	$N+1$	$\bar{z}_1$	$N+1$	$\bar{z}_1$
1	0,0010	14	0,0075	27	0,0139	40	0,0203
2	0,0015	15	0,0080	28	0,0144	41	0,0208
3	0,0020	16	0,0085	29	0,0149	42	0,0212
4	0,0025	17	0,0089	30	0,0154	43	0,0217
5	0,0030	18	0,0094	31	0,0158	44	0,0222
6	0,0035	19	0,0099	32	0,0163	45	0,0227
7	0,0040	20	0,0105	33	0,0168	46	0,0231
8	0,0045	21	0,0109	34	0,0173	47	0,0236
9	0,0050	22	0,0114	35	0,0178	48	0,0241
10	0,0055	23	0,0119	36	0,0183	49	0,0246
11	0,0060	24	0,0124	37	0,0188	50	0,0251
12	0,0065	25	0,0129	38	0,0193	51	0,0256
13	0,0070	26	0,0134	39	0,0198	52	0,0261

Wenn wir in (**K1**) $p = 0{,}02$ vorschreiben, dann müssen wir $N + 1 \leqq 39$ wählen. Dieses Kriterium hat noch ein Freiheitsgrad. Für verschiedene $N + 1$ bekommen wir folgende mittlere Kontrollanzahl für das Kriterium (**K9**):

$N + 1$	Kontrollanzahl	$N + 1$	Kontrollanzahl
1	1000	29	62,96
2	501	30	62,82
5	204,4	31	62,74
10	109,5	32	62,74
15	81,1	33	62,79
20	69,5	35	63,06
25	64,5	40	64,5
28	63,20	50	69,5

Die kleinste Kontrollanzahl entspricht der Länge eines Kontrollintervalls von 31 oder 32 Stücke. Wenn wir uns jetzt an beide Kriterien (**K1**) und (**K9**) binden, dann bekommen wir für $p = 0{,}02$ ein entsprechendes Kontrollintervall 31 Stücke. Diese Wahl sichert die kleinste Kontrollanzahlanzahl und auch $\bar{z}_1 \leqq p$. Dagegen für $p = 0{,}01$ müssen wir $N + 1 = 19$ wählen, obwohl die entsprechende Kontrollanzahl höher sein wird. Doch für diesen Fall, sichert diese Wahl relativ kleinste Kontrollanzahl.

Aus dem Standpunkt des Kriteriums (**K3**) bringt unsere Behandlung folgende Resultate:

$\nu = 50$		$\nu = 10$		$\nu = 1$	
$N + 1$	Kosten	$N + 1$	Kosten	$N + 1$	Kosten
4	0,3759	12	0,1490	49	0,04647
5	0,3511	13	0,1479	50	0,04626*
6	0,3432*	14	0,1475*	51	0,04634
7	0,3443	15	0,1479		
8	0,3516	16	0,1488		

Das optimale Kontrollintervall bleibt auch dem aus Standpunkt des Kriteriums (24) unverändert. Denn die neuen Kosten können nicht (siehe (39)) dieses Minimum nicht verschieben.

Für das Kriterium (**K6**) haben wir folgende Resultate bekommen:

$\nu = 50$		$\nu = 10$		$\nu = 1$	
$N + 1$	Kosten	$N + 1$	Kosten	$N + 1$	Kosten
4	0,3789	12	0,15993	49	0,0975
5	0,3551	13	0,15991*	50	0,0974*
6	0,3482*	14	0,16010	51	0,0975
7	0,3503	15	0,1619		

Mit Ausnahme $v = 10$ haben wir dieselbe Resultate als für (**K3**) bekommen. Alles, was früher über (**K4**) gesagt wurde, gilt auch im Falle (**K7**). Dadurch wird unser Beispiel vollständig analysiert.

4. VERALLGEMEINERUNG

Wie schon früher [2] angeführt wurde, ist das in dieser Arbeit behandelte Problem ein spezieller Fall des nächsten:

Es sei $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Markovsche Kette mit k Zuständen $(1, 2, \ldots, k)$ und einer Übergangsmatrix **A**. Wir sollen solche Kontrollintervalle und Stichprobenpläne angeben um die Hypothese $X_n = j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ für eine vorgeschriebene Risikofunktion „am besten" abzuschätzen. Von verschiedenen Markovschen Ketten sind besonders solche interessant, für welche der Aufenthalt in einem Zustand lang ist (d.h. $1 - \varepsilon < a_{ii} < 1$, ε klein), und für welche die Übergangsmatrix A die Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

hat.

Mit Hilfe in dieser Arbeit angeführten Methoden können wir auch dieses verallgemeinerte Problem formal lösen. Doch diese Formel erlauben fast nicht konkrete Beispiele zu lösen. In diesem Fall bleibt es übrig die Monte-Carlo-Methoden beim Rechnen auszunützen.

Wir haben auch einige konkrete Fälle studiert in welchen die Kontrollintervalle als Zufallsgrössen vorausgesetzt wurden. Aber die Ergebnisse waren in diesen konkreten Fällen ungünstiger als die, die wir mit den konstanten Kontrollintervallen erzielt haben.

ANHANG

Obwohl die Werte q_{11}, q_{12}, q_{22}, für alle Kombinationen: a = 0,99; 0,995; 0,998; 0,999; 0,9995; 0,9998; 0,9999; p_1 = 0,00; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,06; 0,07; 0,08; 0,09; 0,10; p_2 = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50; c = 0, 1, 2, 3, 4, 5 ausgerechnet wurden, bringen wir in diesem Anhang nur einen Auswahl der Werte von q_{11}, q_{12}, q_{22}. Diese Auswahl soll nicht nur die Ausrechnungen erleichtern, sondern auch einen schnellen Überblick ermöglichen.

Zuerst führen wir die Werte von q_{22} an, denn diese Werte von a und p_1 unabhängig sind. Dann folgen die Werte von q_{11}, die nur von p_2 unabhängig sind und erst dann die Werte von q_{12}. In den Tabellen wurden die Werte $q_{ij} \cdot 10^4$ angeführt, d.h. beim Benützen muss man diese Werte mit 10^{-4} multiplizieren. Wenn irgendwo der Wert 0 steht, soll das bedeuten, dass dieser Wert kleiner als $5 \cdot 10^{-5}$ ist.

Alle Werte von q_{11}, q_{12} und q_{22} wurden auf der Rechenmaschine URAL II im Institut für Rechentechnik der Tschechoslovakischen Akademie der Wissenschaften und der Technischen Hochschule zu Prag unter der Leitung des Herrn M. Zamrazil durchgeführt. Die Zusammenfassung dieser Resultate in den Tabellen hat Frl. J. Růžková vorbereitet. Diesen beiden gehört mein herzlichster Dank für ihre Arbeit.

(Eigegangen am 13. Mai 1965).

LITERATUR

[1] J. G. Kemeny, J. L. Snell, G. L. Thompson: Introduction to Finite Mathematics. Englewood Cliffs, N. Y. Prentice-Hall 1957.

[2] Z. Koutský: Markovsche Ketten und Monte-Carlo-Modelle der Produktion. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Magdeburg 8 (1964), 3/4, 337—340.

[3] Е. С. Кочетков, Й. Кржепела, М. Ульрих: Оптимальные статистические планы управления для одного типа производственных устройств. Kybernetika 1 (1965), 5, 421—430.

VÝTAH

Stanovení kontrolního intervalu a přejímacího plánu pro kontrolní diagramy posuzováním

ZDENĚK KOUTSKÝ

Pro stanovení optimálního kontrolního intervalu a optimálního přejímacího plánu vzhledem ke kritériím (**K1**)–(**K9**) při užití kontrolních diagramů posuzováním byl vzat jako matematický model výrobního procesu ($V1 - V7$) markovský řetězec se dvěma stavy. Je-li výrobní proces ve stavu dobrém, potom pravděpodobnost zmetku je p_1, je-li ve stavu špatném, potom je pravděpodobnost zmetku p_2. Matice pravděpodobností přechodů markovského řetězce, tj. přechodů výrobního procesu ze stavu dobrého do špatného, je známá (vzorec (1)).

Tento model umožňuje dále stanovit: průměrnou délku výrobního cyklu, tj. průměrnou dobu mezi dvěma po sobě jdoucími přerušeními výrobního procesu (9), pravděpodobnost, že stroj bude zastaven v dobrém (11) resp. špatném (12) stavu, pravděpodobnost správného a chybného rozhodnutí (17), průměrné procento vyrobených (24) a propuštěných zmetků (30).

Dr. Zdeněk Koutský, CSc., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.

Tabelle 1.

$q_{22} \cdot 10^4$

p_2 / (n, c)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9 und 1,0
(5, 0)	5905	3277	1681	778	313	102	24	3	0
(10, 0)	3487	1074	282	60	10	1	0	0	0
(10, 1)	7361	3758	1493	464	107	17	1	0	0
(10, 2)	9298	6778	3828	1673	547	123	16	1	0
(20, 0)	1216	115	8	0	0	0	0	0	0
(20, 1)	3917	692	76	5	0	0	0	0	0
(20, 2)	6769	2061	355	36	2	0	0	0	0
(50, 0)	52	0	0	0	0	0	0	0	0
(50, 1)	338	2	0	0	0	0	0	0	0
(50, 2)	1117	13	0	0	0	0	0	0	0
(50, 3)	2503	57	0	0	0	0	0	0	0
(50, 4)	4312	185	2	0	0	0	0	0	0

Tabelle 2.

$q_{11} \cdot 10^4$

$a = 0{,}9990$

$a^5 = 0{,}9950 \quad a^{10} = 0{,}9900 \quad a^{20} = 0{,}9802 \quad a^{50} = 0{,}9512$

p_1 / (n, c)	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
(5, 0)	9950	9462	8994	8545	8113	7699	7302	6922	6558	6209	5875
(10, 0)	9900	8954	8090	7301	6582	5928	5333	4792	4301	3855	3452
(10, 1)	9900	9858	9740	9559	9325	9048	8736	8398	8040	7668	7288
(10, 2)	9900	9899	9892	9873	9839	9787	9714	9620	9504	9365	9206
(20, 0)	9802	8017	6544	5330	4333	3514	2844	2296	1850	1486	1192
(20, 1)	9802	9637	9215	8627	7943	7213	6474	5752	5066	4427	3840
(20, 2)	9802	9792	9733	9596	9372	9062	8675	8224	7723	7189	6635
(50, 0)	9512	5755	3464	2074	1236	732	431	253	147	85	49
(50, 1)	9512	8661	6999	5282	3809	2658	1807	1203	787	506	321
(50, 2)	9512	9381	8766	7712	6440	5142	3559	2956	2150	1527	1063
(50, 3)	9512	9497	9343	8915	8189	7233	6167	5067	4046	3142	2381
(50, 4)	9512	9511	9482	9351	9046	8527	8706	6935	5983	5019	4102

Tabelle 3.

$$q_{11} \cdot 10^4$$
$$q_{13} = a^n - q_{11}$$
$$a = 0{,}9998$$
$$a^5 = 0{,}9990 \quad a^{10} = 0{,}9980 \quad a^{20} = 0{,}9960 \quad a^{50} = 0{,}9901$$

(n, c) \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
(5, 0)	9990	9500	9030	8579	8164	7730	7332	6950	6584	6234	5899
(10, 0)	9980	9026	8154	7360	6635	5975	5375	4830	4335	3886	3480
(10, 1)	9980	9937	9819	9636	9400	9120	8807	8466	8105	7730	7346
(10, 2)	9980	9979	9971	9952	9918	9865	9792	9697	9580	9440	9280
(20, 0)	9960	8146	6649	5416	4402	3571	2890	2333	1879	1510	1211
(20, 1)	9960	9792	9364	8766	8071	7329	6578	5845	5148	4498	3902
(20, 2)	9960	9950	9889	9751	9523	9201	8815	8356	7848	7305	6742
(50, 0)	9901	5990	3605	2159	1286	762	449	262	153	89	51
(50, 1)	9901	9015	7285	5498	3965	2766	1881	1252	819	527	334
(50, 2)	9901	9764	9124	8087	6700	5352	4121	3077	2237	1589	1106
(50, 3)	9901	9885	9725	9280	8523	7529	6409	5274	4211	3271	2478
(50, 4)	9901	9899	9869	9734	9416	8875	8124	7218	6227	5224	4269

Tabelle 4.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0050 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (5, 0)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	37	36	35	34	34	33	32	32	31	30	30
0,2	27	26	26	25	24	24	23	23	22	22	21
0,3	20	19	18	18	17	17	17	16	16	15	15
0,4	14	13	13	13	12	12	12	11	11	11	10
0,5	10	9	9	9	9	8	8	8	8	7	7
0,6	7	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5
0,7	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3
0,8	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0,9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 5.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0100 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (10, 0)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	58	55	52	50	47	45	43	40	38	37	35
0,2	36	33	31	30	28	26	25	23	22	20	19
0,3	23	21	20	18	17	16	15	14	13	12	11
0,4	15	14	13	12	11	10	9	9	8	7	7
0,5	10	9	8	8	7	7	6	6	5	5	4
0,6	7	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3
0,7	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2
0,8	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
0,9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 6.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0100 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (10, 1)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	89	87	86	85	83	82	80	78	77	75	73
0,2	69	68	66	65	63	61	59	58	56	54	53
0,3	52	50	49	47	46	44	42	41	39	38	36
0,4	39	37	36	34	33	32	30	29	28	26	25
0,5	30	28	27	26	24	23	22	21	20	19	18
0,6	23	22	21	20	18	17	16	15	15	14	13
0,7	19	17	16	15	14	13	13	12	11	10	9
0,8	15	14	13	12	11	10	10	9	8	8	7
0,9	12	11	10	10	9	8	7	7	6	6	5
1,0	10	9	8	8	7	6	6	5	5	4	4

 Tabelle 7.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0100 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (10, 2)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	97	97	97	97	96	96	95	95	94	93	93
0,2	88	88	87	86	86	85	84	83	82	81	80
0,3	74	74	73	72	71	70	69	68	67	66	64
0,4	61	60	59	58	57	56	54	53	52	51	49
0,5	49	48	47	46	45	44	42	41	40	39	38
0,6	40	39	38	36	35	34	33	32	31	30	29
0,7	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23
0,8	27	26	26	25	24	23	22	21	20	19	18
0,9	23	22	21	21	20	19	18	17	16	15	15
1,0	20	19	18	17	17	16	15	14	13	13	12

Tabelle 8.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0198 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (20, 0)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	78	69	61	54	48	42	38	33	30	27	24
0,2	40	33	29	25	21	18	16	14	12	10	9
0,3	23	19	16	14	12	10	8	7	6	5	4
0,4	15	12	10	9	7	6	5	4	4	3	2
0,5	10	8	7	6	5	4	3	3	2	2	1
0,6	7	5	5	4	3	3	2	2	1	1	1
0,7	4	4	3	2	2	2	1	1	1	1	1
0,8	3	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0
0,9	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$q_{12} \cdot 10^4$

$q_{14} = 0{,}0198 - q_{12}$

$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (20, 1)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	141	135	129	122	115	110	102	95	89	83	78
0,2	86	80	74	69	63	58	53	48	44	40	37
0,3	56	51	46	42	38	34	31	27	24	22	19
0,4	39	36	32	29	25	22	20	18	15	13	12
0,5	30	26	23	21	18	16	14	12	10	9	8
0,6	23	20	18	15	13	12	10	9	7	6	6
0,7	18	16	14	12	10	9	8	6	6	5	4
0,8	15	13	11	9	8	7	6	5	4	3	3
0,9	12	10	9	7	6	5	4	4	3	2	2
1,0	10	8	7	6	5	4	3	3	2	2	1

Tabelle 10.

$q_{12} \cdot 10^4$

$q_{14} = 0{,}0198 - q_{12}$

$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (20, 2)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	176	174	171	167	163	159	155	150	145	139	134
0,2	126	122	118	114	110	105	100	95	90	85	80
0,3	88	84	80	76	72	67	63	59	55	51	47
0,4	64	61	57	54	50	46	42	40	36	33	30
0,5	49	46	43	40	37	34	31	28	26	23	21
0,6	39	37	34	31	29	26	24	22	19	17	15
0,7	32	30	28	25	23	21	19	17	15	13	12
0,8	27	25	23	21	19	17	15	13	12	10	9
0,9	23	21	19	17	15	14	12	11	9	8	7
1,0	20	18	16	14	13	11	10	9	8	7	6

Tabelle 11.

$q_{12} \cdot 10^4$

$q_{14} = 0{,}0488 - q_{12}$

$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (50, 0)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	86	58	39	26	18	13	9	6	5	3	3
0,2	38	24	16	10	6	4	3	2	1	1	0
0,3	22	14	9	5	3	2	1	1	1	0	0
0,4	14	9	6	3	2	1	1	0	0	0	0
0,5	10	6	4	2	1	1	0	0	0	0	0
0,6	6	4	2	2	1	0	0	0	0	0	0
0,7	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0
0,8	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0,9	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 12.

$q_{12} \cdot 10^4$

$q_{14} = 0{,}0488 - q_{12}$

$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (50, 1)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	180	149	120	94	73	57	44	34	26	21	17
0,2	83	67	51	37	27	20	14	9	7	5	3
0,3	54	41	30	22	15	11	7	5	3	2	1
0,4	38	28	20	14	10	7	5	3	2	1	1
0,5	29	21	15	10	7	5	3	2	1	1	1
0,6	22	16	11	7	5	3	2	1	1	1	0
0,7	18	12	8	5	4	2	2	1	1	0	0
0,8	14	10	6	4	3	2	1	1	0	0	0
0,9	12	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0
1,0	10	6	4	2	1	1	1	0	0	0	0

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0488 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (50, 2)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	267	244	217	189	161	136	114	95	79	65	55
0,2	131	117	98	80	64	50	39	30	22	17	12
0,3	86	73	60	50	40	28	21	15	11	8	6
0,4	62	52	42	33	25	19	14	10	7	5	3
0,5	48	39	31	24	18	13	10	7	5	3	2
0,6	38	31	24	18	14	10	7	5	3	2	2
0,7	31	25	19	14	11	8	5	4	3	2	1
0,8	26	21	16	12	8	6	4	3	2	1	1
0,9	22	17	13	9	7	5	3	2	1	1	1
1,0	19	15	11	8	5	4	2	2	1	1	0

Tabelle 14.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0488 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (50, 3)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	342	326	307	285	260	234	209	184	161	140	122
0,2	180	167	150	132	114	96	80	65	53	42	33
0,3	118	106	93	80	67	55	44	35	27	21	16
0,4	86	76	66	55	46	37	29	23	17	13	10
0,5	67	59	50	42	34	27	21	16	12	9	7
0,6	54	47	40	33	27	21	16	12	9	7	5
0,7	45	39	33	27	21	17	13	9	7	5	4
0,8	38	33	27	22	17	13	10	8	5	4	3
0,9	33	28	23	18	14	11	8	6	4	3	2
1,0	29	24	20	16	12	9	7	5	3	2	2

Tabelle 15.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0488 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9990 \quad (n, c) = (50, 4)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	400	390	378	364	348	326	304	280	256	233	210
0,2	228	217	203	186	169	151	133	116	99	84	70
0,3	151	139	127	114	101	88	75	63	52	42	34
0,4	110	101	91	80	70	60	51	42	34	27	21
0,5	86	78	70	61	53	45	37	30	24	19	15
0,6	70	63	56	49	42	35	29	23	18	14	11
0,7	59	53	46	40	34	28	23	18	14	11	8
0,8	50	45	39	34	28	23	19	15	12	9	7
0,9	44	39	34	29	24	20	16	12	9	7	5
1,0	38	34	29	25	21	17	13	10	8	6	4

Tabelle 16.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0010 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (5, 0)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6
0,2	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4
0,3	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3
0,4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2
0,5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1
0,6 und 0,7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9 und 1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 17.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0020 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (10, 0)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	12	11	11	10	10	9	9	8	8	7	7
0,2	7	7	6	6	6	5	5	5	4	4	4
0,3	5	4	4	4	3	3	3	3	3	2	2
0,4	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1
0,5	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
0,6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,7	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0,8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9 und 1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 18.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0020 = q_{12}$$
$$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (10, 1)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	18	18	17	17	17	16	16	16	15	15	15
0,2	14	14	13	13	13	12	12	12	11	11	11
0,3	10	10	10	10	9	9	9	8	8	8	7
0,4	8	8	7	7	7	6	6	6	6	5	5
0,5	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4
0,6	5	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3
0,7	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2
0,8	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1
0,9	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
1,0	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 19.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0020 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (10, 2)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	20	20	19	19	19	19	19	19	19	19	19
0,2	18	18	18	17	17	17	17	17	17	16	16
0,3	15	15	15	15	14	14	14	14	13	13	13
0,4	12	12	12	12	11	11	11	11	10	10	10
0,5	10	10	9	9	9	9	9	8	8	8	8
0,6	8	8	8	7	7	7	7	6	6	6	6
0,7	7	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5
0,8	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4
0,9	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	3
1,0	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2

Tabelle 20.

$$q_{12} \cdot 10^4$$
$$q_{14} = 0{,}0040 - q_{12}$$
$$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (20, 0)$$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	16	14	12	11	10	9	8	7	6	5	5
0,2	8	7	6	5	4	4	3	3	2	2	2
0,3	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1
0,4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1
0,5	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0,6	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0,7	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0,8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9 und 1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 21.

$q_{12} \cdot 10^4$
$q_{14} = 0{,}0040 - q_{12}$
$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (20, 1)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	29	27	26	25	23	22	21	19	18	17	16
0,2	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
0,3	11	10	9	9	8	7	6	6	5	4	4
0,4	8	7	7	6	5	5	4	4	3	3	2
0,5	6	5	5	4	4	3	3	2	2	2	2
0,6	5	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1
0,7	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1
0,8	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1
0,9	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0
1,0	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Tabelle 22.

$q_{12} \cdot 10^4$
$q_{14} = 0{,}0040 - q_{12}$
$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (20, 2)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	36	35	35	34	33	32	31	30	29	28	27
0,2	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
0,3	18	17	16	15	15	14	13	12	11	10	10
0,4	13	12	12	11	10	9	9	8	7	7	6
0,5	10	9	9	8	8	7	6	6	5	5	4
0,6	8	7	7	6	6	5	5	4	4	4	3
0,7	7	6	6	5	5	4	4	3	3	3	2
0,8	6	5	5	4	4	3	3	3	2	2	2
0,9	5	4	4	4	3	3	2	2	2	2	2
1,0	4	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1

Tabelle 23.

$q_{12} \cdot 10^4$

$q_{14} = 0{,}0100 - q_{12}$

$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (50, 0)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	18	12	8	5	4	3	2	1	1	1	1
0,2	8	5	3	2	1	1	1	0	0	0	0
0,3	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0
0,4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0,5	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0,6	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0,7	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9 und 1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 24.

$q_{12} \cdot 10^4$

$q_{14} = 0{,}0100 - q_{12}$

$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (50, 1)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	37	31	25	19	15	12	9	7	5	4	3
0,2	18	14	11	8	6	4	3	2	1	1	1
0,3	11	9	6	5	3	2	2	1	1	1	0
0,4	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0
0,5	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0
0,6	5	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
0,7	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0
0,8	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0,9	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1,0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 25.

$q_{12} \cdot 10^4$

$q_{14} = 0{,}0100 - q_{12}$

$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (50, 2)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	55	50	45	39	33	28	23	19	16	13	11
0,2	28	24	20	17	13	10	8	6	5	3	3
0,3	18	15	12	10	8	6	4	3	2	2	1
0,4	13	11	9	8	5	4	3	2	2	1	1
0,5	10	8	7	5	4	3	2	2	1	1	1
0,6	8	6	5	4	3	2	2	1	1	1	0
0,7	7	5	4	3	2	2	1	1	1	0	0
0,8	6	4	3	2	2	1	1	1	0	0	0
0,9	5	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0
1,0	4	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0

Tabelle 26.

$q_{12} \cdot 10^4$

$q_{14} = 0{,}0100 - q_{12}$

$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (50, 3)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	70	67	63	58	53	48	43	37	33	29	25
0,2	38	34	31	27	23	20	17	14	11	9	7
0,3	25	22	19	17	14	11	9	7	6	4	3
0,4	18	16	14	12	10	8	6	5	4	3	2
0,5	14	12	10	9	7	6	4	3	3	2	1
0,6	11	10	8	7	6	4	3	3	2	1	1
0,7	9	8	7	6	4	4	3	2	1	1	1
0,8	8	7	6	5	4	3	2	2	1	1	1
0,9	7	6	5	4	3	2	2	1	1	1	0
1,0	6	5	4	3	3	2	1	1	1	0	0

$q_{12} \cdot 10^4$

$q_{14} = 0{,}0100 - q_{12}$

$a = 0{,}9998 \quad (n, c) = (50, 4)$

p_2 \ p_1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,1	82	80	77	74	71	67	62	57	52	48	43
0,2	47	45	42	38	35	31	27	24	20	17	14
0,3	31	29	26	23	21	18	16	13	11	9	7
0,4	23	21	19	17	15	13	11	9	7	6	4
0,5	18	16	15	13	11	9	8	6	5	4	3
0,6	15	13	12	10	9	7	6	5	4	3	2
0,7	12	11	10	8	7	6	5	4	3	2	2
0,8	10	9	8	7	6	5	4	3	2	2	1
0,9	9	8	7	6	5	4	3	3	2	2	1
1,0	8	7	6	5	4	3	3	2	2	1	1