

# Potenciální analogie

MÍRKO NOVÁK

V článku jsou popsány principy modelování metodami potenciálních analogií a ukazuje se jejich využití v různých oborech.

## 1. ÚVOD

V kybernetice se často používá modelování. Jednou z méně známých metod je modelování na principu potenciálních analogií, které nalézá použití ve velmi široké oblasti, od teorie automatické regulace, teorie obvodů, teorie signálů a bioniky, přes elektrotechniku a mechaniku až po optiku a geologii. Protože řešení potenciálního pole je úlohou, se kterou se setkáváme v celé řadě oborů, umožňuje její přenášení s jednoho prostředí do druhého nalezení často netušených souvislostí. Tím přispívá metoda potenciálních analogií k vytváření komplexního přístupu ke zdánlivě spolu nesouvisejícím problémům a k odhalení nových neobvyklých řešení, někdy se značnými hospodářskými výsledky (např. náhradou nákladných mechanických či hydraulických modelů při řešení inženýrských staveb mnohem levnějšími modely elektrickými apod.).

Tento článek má čtenáři usnadnit přehled o problematice modelování na principu potenciálních analogií se zvláštním zřetelem právě k uvedeným dvěma hlediskům. Není možno zde pochopitelně podat vyčerpávající soupis všech modifikací a aplikací této metody. Podrobnější poznatky jsou vesměs zachyceny v dosti bohaté literatuře, jejíž malou část zde cituji.

## 2. PRINCIP POTENCIÁLNÍCH ANALOGIÍ A JEJICH MATEMATICKÉ ZÁKLADY

Při řešení jakéhokoliv technického problému se setkáváme se třemi druhy veličin: s budícími veličinami (příčinami), s jejich odezvami (následky) a s parametry daného systému. Budící veličiny a odezvy jsou obecně závislé na čase a na poloze v daném

poli. Můžeme je rozdělit na skalární (vzájemné, relativní, potenciální) a na vektorové (průchozí). Skalární veličiny udávají vztahy mezi stavy dvou různých bodů téhož pole a typické pro ně je, že při jejich určování musíme měřit současně ve dvou různých bodech, přičemž jejich hodnota je obvykle udána rozdílem zjištěných hodnot. Vektorové veličiny jsou naopak vztaženy ke každému jednotlivému bodu pole a lze je určit pouze měřením v tomto bodě. Parametry systému pak udávají vzájemný vztah skalárních a vektorových veličin.

Při studování analogií mezi různými potenciálními poli, v nichž jsou jednotlivé veličiny uplatňovány, musíme mít na zřeteli především princip kontinuity a princip

Fyzikální prostředí	Veličina		Parametry soustav		
	skalární	vektorová	ztrátové	kinetické	potenciální
elektrické proudové pole	napětí	proud	odpor	indukčnost	kapacita
elektrostatické pole	potenciální rozdíl	tok	—	—	dielektrikum
přenos tepla	teplota	tepelný tok	tepelný odpor	—	tepel. kapacita
difúzní pole	koncentrace	množství přenesené hmoty	difúzní odpor	inercie	stlačitelnost
hydrodynamické pole	rychlostní potenciál (tlak)	tok kapalin	viskozita	inercie (hustota)	stlačitelnost
elektromagnetické pole	potenciální rozdíl	tok	reluktance	permeabilita	dielektrikum

Obr. 1. Vztahy mezi veličinami v různých fyzikálních polích.

konservativnosti pole. Vektorové veličiny jsou kontinuální v tom smyslu, že musí vycházet ze zdrojů a vracet se opět do týchž či jiných zdrojů, přičemž jejich celkové množství v daném poli musí být stále rovno součtu jejich množství, které v něm bylo před začátkem působení budících veličin, a množství, které je do pole dodáváno či odebíráno. Obecně se oba tyto principy navzájem podmiňují. Mezi vektorovými a skalárními veličinami v různých potenciálních polích platí známé vztahy, shrnuté částečně v obr. 1.

Poměry v různých potenciálních polích můžeme popsat soustavami parciálních diferenciálních rovnic, jejichž formální podobnosti se pak využívá k tomu, abychom řešení daného problému převedli z méně přístupného fyzikálního prostředí do podmínek, které můžeme snáze ovládat a vyšetřovat. To je základní princip celé metody potenciálních analogií. Druh modelovacího prostředí přitom volíme podle povahy řešení úlohy a typu diferenciálních rovnic, platících pro originální děj. Jestliže si

označíme symbolem  $\Phi$  příslušnou skalární veličinu (tzv. potenciální funkci) a symbolem  $t$  čas, pak většinu v úvahu přicházejících případů lze popsat buď Laplaceovou diferenciální rovnicí

$$(1) \quad \nabla^2 \Phi = 0,$$

nebo tzv. difúzní rovnicí

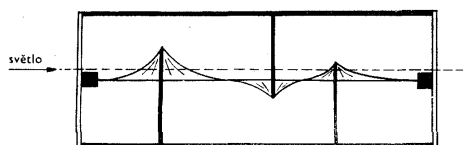
$$(2) \quad \nabla^2 \Phi = k \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

či tzv. vlnovou rovnicí

$$(3) \quad \nabla^2 \Phi = k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

(kde  $k$  je konstanta závisící na parametrech vyšetřované soustavy) nebo jejich modifikacemi.

Velmi často vystačíme přitom s rovnicí (1), která popisuje děje v elektrostatickém, proudovém, magnetickém a gravitačním poli, a za jistých podmínek též s dostatečnou přesností i děje v jiných prostředích (např. průtok tekutiny porézním prostředím).



Obr. 2. K principu mechanických modelů.

Kromě toho lze na ni převést též otázky souvisící s průchodem signálu lineární soustavou, a proto se v dalším věnujeme především metodám modelování úloh tohoto typu.

### 3. TECHNICKÁ REALIZACE POTENCIÁLNÍCH ANALOGIÍ

V současné době se ustálily dvě hlavní koncepce modelovacích zařízení, a to jednak mechanické modely a jednak elektrické proudové modely. Všechny ostatní možnosti využívající jiných fyzikálních principů mají již jen podružný význam.

Mechanické modely jsou většinou vytvořeny pomocí pružné membrány (například gumové blány získané z meteorologických sondážních balonů) napnuté na kruhovém nebo obdélném rámu. Ta je pak vychylována na jednu či druhou stranu soustavou hrotů či profilů, přestavitelných v ploše membrány. Velikost výchylky je možno také měnit. Tímto způsobem je dobře možno modelovat veškeré situace popisované rovnicí (1). Výchylka membrány z klidové polohy v určitém jejím místě pak odpovídá logaritmu absolutní hodnoty modelované funkce. Indikací tvaru čar o konstantní velikosti této veličiny lze provést např. pomocí úzkého světelného svazku, kterým se strany osvětlíme reliéf vzniklý na membráně (obr. 2). Tvar spádnic lze zjišťovat

např. z dráhy kuličky spuštěné z některého z vrcholů reliéfu. Jeho výhodou je především velká názornost a nenáročnost. Získaný model je však dosti nepřesný, protože se zde uplatňuje celá řada zdrojů chyb. Protože membrána je na okrajích pevně upnutá, není možno modelovat případy s výchytkami blízko okrajů a celý modelovaný útvar musíme omezovat na oblast blízko jejího středu. Kromě toho působí obtíže malá homogenita membrán, jejich stárnutí a zmenšování pevnosti v oblasti maximálních výchylek (to lze za cenu obtížnější manipulace zčásti odstranit užíváním membrán z mýdlových filmů). Mechanické modely mají proto především význam pro studijní účely, k rychlému vytvoření názoru na kvalitativní povahu řešeného problému a nehodí se k podrobnějšímu kvantitativnímu vyšetřování. Velmi dobře se však mohou uplatnit také jako pedagogická pomůcka.

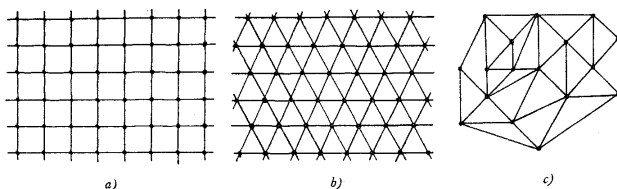
Podstatně větší možnosti dávají modely užívající elektrického proudového pole. Liší se navzájem jednak podle povahy modelovacího prostředí, jednak podle toho, zda řešená úloha je rovinná či prostorová. Všimněme si nejprve prvního hlediska. Proudové elektrické pole můžeme vytvořit v látkách nalézajících se jak v tuhé, tak kapalné a případně též v plynné fázi (ionizovaný plyn). Z technických důvodů má pro účely modelování význam pouze použití tekutého nebo tuhého prostředí. První možnost je starší a vedla k vytvoření známých elektrolytických van, ať již určených pro řešení prostorových či pouze rovinných problémů. Druhá možnost se uplatnila ve větší míře teprve asi od konce druhé světové války, a to jednak na základě využití elektricky vodivých papírů či tenkých kovových vrstev pro řešení rovinných úloh (nebo takových prostorových úloh, které lze na rovině převést), jednak v podobě modelovacích (např. odporových) sítí, kterými je principiálně možno řešit jak rovinné, tak i prostorové úlohy. Modelování na zařízeních s elektrickým proudovým polem se provádí tak, že do jeho míst, odpovídajících singularitám modelované úlohy, umístíme zřídla či nory proudu (ať již ve tvaru bodových, čárových, plošných nebo prostorových elektrod) a měříme buď napětí vzniklé mezi vyšetřovaným a referenčním místem, nebo velikost elektrického gradientu, z něhož lze určit intenzitu proudu v daném bodě. Modelovací zařízení užívající elektrického proudového pole jsou poněkud složitější nežli mechanické modely (vyžadují zvláštní napájecí jednotky, zvláštní měřicí přístroje a pod.), přesto však jejich pořizovací cena leží většinou hluboko pod cenou analogových zařízení jiných druhů.

Protože v teorii systémů, teorii přenosu informace a teorii automatické regulace má zvláštní význam řešení rovinných problémů, nebudeme se zde blíže zabývat modelováním prostorových úloh. Připomeneme pouze, že k tomu jsou běžně užívány tzv. hluboké elektrolytické vany o obsahu někdy až několik  $m^3$  s různým stupněm automatizace napájecího, modelovacího a měřicího ústrojí (častá jsou zejména sledovací zařízení zapisující na papír průběh různých řezů ekvipotenciálními plochami). Kromě hlubokých elektrolytických van jsou někdy k těmto účelům užívány též prostorové modelovací sítě. Otázky modelování prostorových úloh jsou dosti podrobně rozebírány např. v [1], kde je též uvedena další literatura.

Při modelování rovinných úloh musíme nahradit ideální nekonečně tenké a abso-

lutně homogenní\* modelovací prostředí o neomezených geometrických rozměrech\*\* jistým fyzikálním prostředím. Vzhledem k technickým možnostem to znamená, že každé modelovací zařízení přináší sebou jisté principiální omezení přesnosti. K takto vzniklým chybám se ovšem při vlastním procesu modelování ještě přičítají další chyby. Ukažme si nyní způsoby, kterými lze výše uvedené požadavky respektovat.

Nejprve obraťme zřetel na otázku tloušťky a homogenity prostředí. Jsou dvě zásadní cesty: použití spojitých či nespojitých prostředí. *Spojité modelovací prostředí* lze realizovat např. tenkou vrstvou elektrolytu či elektricky vodivou fólií (papírem). Protože téměř vždy je jejich tloušťka zanedbatelně malá proti dostupným geometrickým rozměrům (až 1 : 300 tzv. mokrých a až 1 : 500 u tzv. suchých prostředí) je možno chyby způsobené případným nerovnoměrným rozložením proudového pole



Obr. 3. Příklady nespojitých modelovacích prostředí: a) čtvercová síť, b) trojúhelníková síť, c) nesymetrická síť.

v průřezu modelovací vrstvy považovat za podružné. Hlavní obtíž je pak nedostatečná homogenita. To je ožehavé zvláště u vodivých fólií a papírů, kde nerovnoměrnosti specifické vodivosti vzniklé při jejich výrobě mohou dosahovat až i 10% a zřídka kdy poklesnou pod 1%. Proti tomu lze elektrolytickou vrstvu považovat za dokonale homogenní. V praxi se však ukazuje, že i zde jsou omezení způsobená např. postupným zamořováním původně čistého elektrolytu zplodinami parazitní elektrolyzy, nerovnoměrnostmi tvaru a polohy modelovacích nádob (u tenkých vrstev o velkých plochách se uplatňuje dosti silně i průhyb dna či vlnění hladiny způsobené drobnými ořesy budovy apod.). Proto se nelze s běžnými prostředky dostat pod asi 1% a v krajních případech pod asi 0,1%. Poněkud lepší vlastnosti mokrých modelovacích prostředí z tohoto hlediska jsou ovšem vykoupeny řadou jiných potíží, které v mnohých případech vedou k tomu, že i za cenu menší přesnosti dáme přednost použití vodivého papíru či fólie. Především pro napájení elektrolytických van je nutno vzhle-

\* Tento požadavek může být zmírněn tehdy, jestliže povaha řešené úlohy umožňuje využít určitých nehomogenit, anebo naopak zcela změněn, jestliže by bylo třeba prostředí o přesně daném druhu nehomogenity.

\*\* Tento požadavek může být zmírněn nebo zcela odpadnout, řešíme-li úlohu formulovanou pouze v části celé roviny.

dem k nebezpečí polarizace elektrolytu používat střídavého proudu o kmitočtu asi 500–1500 Hz. To ovšem znamená, že zdroje a nory proudu lze realizovat pouze dokonalým vzájemným fázovým posuvem jednotlivých výstupů z napájecího generátoru o 180°. Protože se však uplatňují parazitní kapacity přívodů i celého modelovacího prostředí, je nutno provést vyrovnání fázových posuvů před každým novým nastavením polohy elektrod. Tato potřeba zcela odpadá u suchých prostředí, protože zdroje i nory proudu realizujeme opačnou polaritou stejnosměrného napáječe. Kromě toho je velkou výhodou suchých prostředí, že lze na jejich povrchu přímo zakreslovat různé pomocné sítě i výsledky měření a nemusíme užívat žádného pomocného zapisovacího zařízení. *Nespojitá modelovací prostředí* bývají realizována např. v podobě odporových sítí (viz např. obr. 3). Jejich velkou předností je především to, že stupeň nehomogenity je zde (za předpokladu použití dostatečně přesných stavebních prvků) jasně určen. Kromě toho lze vytvářet tímto způsobem také sítě umožňující řešení úloh vedoucích k diferenciálním rovnicím typu (2) či (3)\*. Velkou nevýhodou odporových sítí jsou však jejich vysoké pořizovací náklady. Abychom docílili dostatečně jemného kvantování, je nutno použít značného počtu poměrně velmi kvalitních součástek, jejichž cena spolu s cenou odpovídajícího množství zdířek pro připojení elektrod a sond a cenou montáže mnohonásobně přesahuje úroveň cen jiných zařízení na principu potenciálních analogií.

Poměrně dobře je možno vyrovnat se s otázkou omezených geometrických rozměrů dostupných modelovacích prostředí. Existují zde následující cesty:

a) Nejjednodušší, ale také nejméně přesné a ekonomické je použít co největšího modelovacího prostředí a řešení dané úlohy omezit na malou oblast blízko jeho středu. Podle povahy úlohy bývá tato užitečná oblast asi 10 až 20% celkového průměru, nemá-li chyba modelování přestoupit přes asi 10%.

b) Velmi dobré výsledky je možno dosáhnout použitím různých konformních zobrazení (viz např. [3]), převádějících celou rovinu nebo její část na určitou uzavřenou oblast. Za jistých okolností je tak možno ještě docílit výhodné změny měřítka v oblasti, která nás zvláště zajímá. Kromě toho některá konformní zobrazení zásadně zjednodušují celou řešenou úlohu. Za zmínku zde stojí zvláště následující tři nejčastěji užívaná zobrazení.

Vztah

$$(4) \quad s = \log p$$

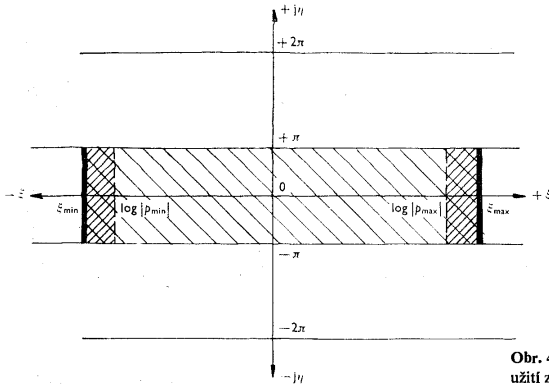
nám přeřazuje celou rovinu  $p = \sigma + j\omega$  mnohoznačně na nekonečně dlouhé pásy o šířce  $2\pi$  v rovině  $s = \zeta + j\eta$ , rovnoběžné s osou  $\zeta$ . Jestliže se nám nyní podaří řešení dané úlohy soustředit do mezikruží  $|p_{\min}| < |p| < |p_{\max}|$ , přičemž čísla  $|p_{\min}|$  a  $|p_{\max}|$  se mohou lišit až o několik řádů, můžeme se bez velkých chyb převést v rovině  $s$

\* Pak je síť ovšem složena nejen z ohmických odporů, ale např. také z kapacit nebo indukčností. Podobný výsledek lze však někdy dosáhnout i u spojitých prostředí, např. využitím kapacity mezi modelovací odporovou a zvláštní vysoce vodivou vrstvou.

do obdélníku o šířce  $2\pi$  a délce  $\xi = \xi_{\max} - \xi_{\min}$ , kde  $\xi_{\max} > \log |p_{\max}|$ ,  $\xi_{\min} < \log |p_{\min}|$  (viz obr. 4). Na užších stranách tohoto obdélníku pak vytvoříme elektrické zkraty, které nám reprezentují obrazy bodů  $p = 0$  a  $p = \infty$ . Podle zkušenosti je vhodné, aby  $\log |p_{\min}| - \xi_{\min} \cong \xi_{\max} - \log |p_{\max}| \geq \pi$ .

Dobře se osvědčuje též tzv. Žukovského zobrazení zprostředkované vztahem

$$(5) \quad s = p \pm \sqrt{(p^2 + 1)},$$



Obr. 4. K možnostem využití zobrazení  $s = \log p$ .

které převádí celou rovinu  $p$  jednou dovnitř a jednou vně jednotkové kružnice v rovině  $s$ .

Zásadní význam mají posléze zobrazení Christoffelovým-Schwarzovým integrálem, která převádějí celou rovinu  $p$  na uzavřenou polygonální oblast. Je-li touto např. obdélník, je zobrazující funkcí eliptický integrál prvního Legendreova druhu

$$(6) \quad s = \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{[(1 - p^2)(1 - k^2 p^2)]}}$$

Příklad jím zprostředkovaného přiřazení roviny  $p$  do roviny  $s$  je naznačen pro

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{[(1 - p^2)(1 - k^2 p^2)]}} = \sin 15^\circ$$

na obr. 5. Jak ukážeme později, uplatní se toto a jemu podobná zobrazení zvláště při řešení různých aproximačních úloh v teorii systémů.

c) V mnoha případech však povaha dané úlohy vyžaduje, aby modelovaná oblast nebyla deformována. Pak je na místě použití tzv. Boothroydova dvojvrstvého modelování. Tímto způsobem, který lze použít jak v případě mokřých, tak i v případě suchých modelovacích prostředí, dostaneme nekreslený kruhový výřez roviny  $p$

okolo počátku (či jeho jistý díl). Na obr. 6 je naznačen jeho princip pro případ použití suchého prostředí a kvadrantový výřez. Dva listy odporového papíru ve tvaru čtvrtkruhu jsou na obvodu kruhu vodičivě spojeny, kdežto všude jinde je odděluje izolační vrstva. Pak lze horní list považovat zde např. za druhý kvadrant kruhu  $p = |p_k|$ , přičemž obraz bodu  $p = \infty$  je na spodním listě pod bodem  $p = 0$ .

#### 4. NĚKTERÉ MOŽNOSTI POUŽITÍ POTENCIÁLNÍCH ANALOGIÍ

Jak bylo již řečeno, je použití modelování na principu potenciálních analogií skutečně mnohostranné. Není ani v možnostech, ani cílem tohoto článku podat zde zevrubný výčet a popis všech možností. Ukážeme zde pouze takové, které mají bezprostřední význam pro v úvodu vyčleně obory, tj. teorii systémů, teorii automatické regulace a teorii přenosu informace.

Jednou z mimořádně důležitých otázek pro všechny tyto obory je analýza soustav se zpětnou vazbou. Přitom může modelování pomocí potenciálních analogií sehrát velmi významnou roli. Předpokládejme pro jednoduchost nejprve nejprostší zpětnovazební soustavu, vytvořenou paralelně spojenou zesilovací a zpětnovazební větví. Bude-li na vstupu zapojen ideální sumátor, zamezující vznik zpětného přenosu zpětnovazební větví, lze přenos\* takovouto soustavou vyjádřit známým vztahem

$$(7) \quad G(p) = \frac{G_A(p)}{1 + G_A(p) G_B(p)},$$

kde  $G_A(p)$  je přenos zesilovací,  $G_B(p)$  přenos zpětnovazební větve a  $p = \sigma + j\omega$  je komplexní kmitočet.

Funkce  $G_A(p)$  (resp.  $G_B(p)$ ) obsahují jistý násobný faktor, určující úroveň zesílení (resp. zeslabení) při průchodu signálu větví. Zajímá nás obvykle, jaké hodnoty těchto faktorů lze v daném případě připustit, aby celá soustava nevybočila z mezí stability\*\* nebo jak se jejich změna projeví na jejich přenosových vlastnostech.

V prvním případě musíme tedy zjistit, jak závisí poloha kořenů vztahu

$$(8) \quad G_A(p) G_B(p) + 1 = 0$$

na těchto faktorech.

Označíme

$$G_{A,B}(p) = \gamma_{A,B} \hat{G}_{A,B}(p),$$

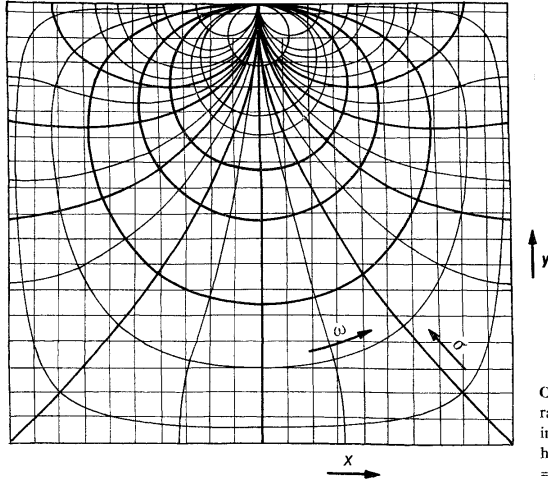
kde  $\gamma_{A,B}$  je příslušný násobný faktor a  $\hat{G}_{A,B}(p)$  odpovídající funkce po jeho vyčlenění. Pak lze vztah (8) upravit na

$$(9) \quad \hat{G}_A(p) \hat{G}_B(p) + C = 0,$$

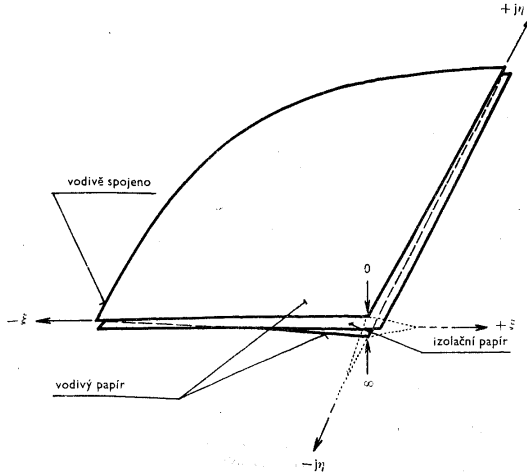
\* Pojem přenos budeme užívat ve smyslu přenosové funkce, čímž budeme rozumět poměr operátorových obrazů signálů na výstupu a na vstupu dané soustavy.

\*\* Podmínkou stability zde je, že póly přenosu  $G(p)$  musí ležet pouze uvnitř levé poloroviny  $p$ .





Obr. 5. Příklad zobrazení eliptickým integrálem prvního druhu pro  $K(k) = \sin 15^\circ$ .



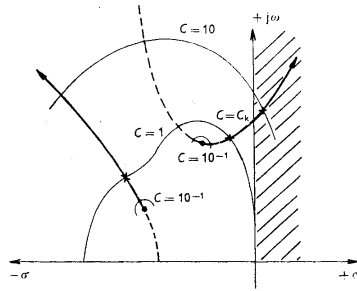
Obr. 6. K principu dvojrvtvého modelování. Silné šipky naznačují místa přívodních elektrod v případě modelování obvodové funkce dynamické soustavy.

342 kde

$$C = \frac{1}{\gamma_A \gamma_B}$$

Předpokládejme, že funkce  $\hat{G}_A(p)$  a  $\hat{G}_B(p)$  známe a že se nám je podaří namodelovat pomocí potenciálních analogií\*. Protože kořeny vztahu (9) leží v místech, kde je současně

$$(10) \quad \begin{aligned} |\hat{G}_A(p) \hat{G}_B(p)| &= C, \\ \text{Arg } \hat{G}_A(p) \hat{G}_B(p) &= \pi \pm 2\nu\pi, \\ \nu &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$



Obr. 7. Příklad vyšetřování stability zpětnovazební soustavy.

nalezneme je v modelovacím prostředí, kde jsme vytvořili modul součinu  $\hat{G}_A \hat{G}_B$ , jako průsečíky jisté ekvipotenciály s jistými siločárami. Jejich vyšetřování lze zejména u proudových analogií provést bez zvláštních obtíží. Jestliže se nám tedy takto podaří zakreslit celou mapu čar  $|\hat{G}_A \hat{G}_B| = \text{konst.}$  protnutou mapou příslušných čar konstantní fáze, máme odpověď na danou otázku. Výsledkem jsou pak tedy trajektorie polohy pólů rovnice (7), okótované velikostí vyšetřovaného faktoru. Příklad je na obr. 7. Vidíme, že pro  $C \geq C_k$  přestane být tato soustava stabilní.

Tímto způsobem je ovšem možno vyšetřovat podmínky stability i strukturálně mnohem složitějších zpětnovazebních soustav. Lze dokázat, že řešení celé úlohy je možno vždy svést na řešení určení polohy kořenů rovnice typu  $F(p) + C = 0$ . V některých případech potřebujeme však zjistit, jak závisí stabilita soustavy na změně některého jejího parametru  $\kappa$ , který již není přímo zmíněným násobným faktorem. Jestliže se nám v tomto případě podaří rozložit funkci  $F(p)$  do tvaru  $F(p) = F_1(p) + \kappa F_2(p)$ , můžeme opět úlohu vyřešit stejným postupem, přičemž provedeme rozbor

\* V případě, že jak zesilovací, tak zpětnovazební větev obsahuje pouze lineární prvky s tzv. soustředěnými parametry, jsou přenosové funkce  $G_A(p)$  resp.  $G_B(p)$  racionální (lomené) v proměnné  $p$ . O způsobu modelování funkcí tohoto typu se v dalším zmíníme podrobněji.

polohy kořenů vztahu  $F_3(p) + \kappa = 0$ , kde  $F_3(p) = (F_1(p) + 1)/F_2(p)$  v závislosti na velikosti parametru  $\kappa$ .

Potřebujeme-li kromě podmínek stability zjistit též změnu tvaru frekvenčních charakteristik přenosu  $G(p)$  v závislosti na změněných hodnotách některých parametrů, můžeme postupovat velmi podobně. Předpokládejme například, že nás zajímá změna amplitudové charakteristiky vztahu (7) v závislosti na změně jistého prvku  $r$  zpětnovazební cesty. Jestliže se nám podaří upravit výraz pro zpětnovazební přenos do tvaru

$$G_B(p) = G_{B1}(p) + r G_{B2}(p),$$

můžeme psát

$$(11) \quad G(p) = \frac{G_A(p)}{1 + G_A(p)[G_{B1}(p) + r G_{B2}(p)]} = \\ = \frac{G_{B2}^{-1}(p)}{\frac{G_A(p) G_{B1}(p) + 1}{G_A(p) G_{B2}(p)} + r} = \frac{G_{B2}^{-1}(p)}{R(p) + r} = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Budou-li funkce  $G_{B1}(p)$  a  $G_{B2}(p)$  takového druhu, že je lze modelovat pomocí potenciálních analogií, dokážeme na základě vztahu (11) určit také nulové body pomocné funkce  $R(p)$ . Vyřešením trajektorií nulových bodů rovnice  $R(p) + r = 0$  pak zjistíme potřebné polohy pólů funkce  $G(p)$ . Tím máme k dispozici všechny potřebné údaje pro to, abychom ji dokázali modelovat. Hledaná amplitudová charakteristika je pak řezem reliéfu její absolutní hodnoty, vedeným podél osy  $j\omega$ .

Ve velmi mnoha případech se zabýváme soustavami lineárními, které nadto obsahují pouze stavební prvky\* s tzv. soustředěnými parametry. Jejich přenosové funkce jsou pak racionální v proměnné  $p$ . Všimněme si nyní proto způsobů, jakými lze tyto případy modelovat. Především nutno mít na zřeteli to, že u lineárních soustav, sestavených z fyzikálně reálných stavebních prvků jsou přenosové funkce vždy racionálními funkcemi v proměnné  $p$ , majícími reálné koeficienty. Je tedy rozložení příslušných nulových bodů a pólů vždy souměrné vzhledem k reálné ose  $\sigma$ . Díky tomu se můžeme při jejich modelování omezit pouze na jednu polorovinu  $p$  a tak snížit jeho složitost.

V současné době se používají v zásadě dva principy modelování těchto funkcí. Pro první z nich budeme užívat názvu „bodové analogie“. Ve své podstatě pochází již z konce minulého století, i když jeho aplikace pro námi sledované obory jsou poměrně nové. Je dobře znám a byl podrobně popsán v celé řadě prací, citovaných

\* Pod pojmem stavební prvky rozumíme jednotlivé technicky ucelené díly či součástky dané soustavy, jejichž působení je typické, je možno je matematicky formulovat a nelze je dále fyzikálně rozložit. Příkladem mohou být elektrické soustavy, kde stavebními prvky jsou jednotlivé odpory, kondenzátory, indukční cívky, transformátory, tranzistory, elektronky apod. Slova „prvek“ je zde tedy užíváno v přeneseném významu. Obsah pojmu stavební prvek samozřejmě silně závisí na fyzikální povaze sledované soustavy, technice použité k její realizaci a stavu příslušné technologie.

např. v [1], [2], [4] a [5]. Využívá se zde skutečnosti, že výraz pro komplexní potenciál proudového pole, vytvořeného soustavou bodových zřidel a nor je formálně shodný s logaritmem přenosové funkce  $G(p)$ , zapsané ve tvaru

$$(12) \quad G(p) = \gamma \frac{\prod_{i=1}^n (p - p_{ni})}{\prod_{v=1}^m (p - p_{pv})},$$

kde  $p_{ni}$  značí polohy nulových bodů,  $p_{pv}$  polohy pólů a  $\gamma$  je reálná konstanta.

Abychom mohli tedy tento způsob modelování použít, musíme polohu nul a pólů funkce (12) znát. Velmi pohodlně pak můžeme sledovat průběh jejího modulu podél jistých čar v rovině  $p$ , případně zakreslit průběh křivek  $|G(p)| = \text{konst.}$  Přitom vycházíme ze vztahu

$$(13) \quad U_{p_x - p_r} = k_m \log \left| \frac{G(p_x)}{G(p_r)} \right|,$$

kde  $U_{p_x - p_r}$  je napětí změřené voltmetrem s dostatečně velkým vnitřním odporem mezi body  $p = p_x$  a  $p = p_r$ , a  $k_m$  je tzv. konstanta modelování. Tato je reálná a její velikost závisí na použité intenzitě proudu a specifickém odporu modelovacího prostředí. Obvykle se určuje experimentálně na základě namodelování některé známé jednoduché funkce, např.  $G(p) = p$ . Pomocí dvojice známých pomocných funkcí (např.  $G_1(p) = p$  a  $G_2(p) = p^2 + a$ ) můžeme provést též buď zakreslení potřebné sítě souřadnic do modelovacího prostředí nebo zaměření polohy jistého důležitého bodu.

V „bodové“ analogii je možno teoreticky také vyšetřovat průběh argumentu funkce (12) podél libovolné křivky a zakreslovat mapy čar  $\text{Arg } G(p) = \text{konst.}$  V praxi je však realizace takového měření značně obtížná a přitom dosti nepřesná.

Novější a poněkud méně známý je princip tzv. „dipólové analogie“, na nějž upozornil Guillemin. Je založen na následující úvaze:

Komplexní potenciál rovinného proudového pole, v němž jsou v místech  $p = p_i$  umístěny dipóly o momentech  $M_i$  a úhlech natočení  $\alpha_i$  lze vyjádřit jako

$$(14) \quad W(p) = U(p) + j V(p) = \sum_{i=1}^m \frac{M_i e^{j\alpha_i}}{p - p_i}.$$

Tento výraz je formálně shodný se zápisem

$$(15) \quad G(p) = \sum_{i=1}^m \frac{r_i e^{j\sigma_i}}{p - p_i},$$

kde  $r_i e^{j\sigma_i}$  jsou rezidua funkce  $G(p)$  v místech pólů  $p_i$ . Rovinné pole popsané v rovnici (14) je možno technicky realizovat pomocí soustavy dipólů, vzniklých těsným přiblížením elektrod pro zřídlo a noru proudu. Je-li  $\Delta p$  jejich vzdálenost, pak takto vzniklou chybu lze zanedbat již ve vzdálenosti asi  $3\Delta p$  od příslušného dipólu. Tímto

způsobem můžeme tedy jednoduše a dosti přesně modelovat přenosové funkce ve tvaru rovnice (15) a vyšetřovat průběhy jejich reálných a imaginárních částí podél libovolných křivek, popř. zakreslovat mapy čar  $\operatorname{Re} G(p) = \text{konst.}$  a  $\operatorname{Im} G(p) = \text{konst.}$

Obraťme nyní pozornost k dalším úlohám, řešitelným pomocí potenciálních analogií. Pro syntézu sdělovacích i regulačních soustav má zvláštní význam otázka aproximace daných požadavků fyzikálně realizovatelnými funkcemi. Jsou-li tyto požadavky kladeny především na průběh modulu hledané funkce uplatní se modelování „bodovou analogií“. Naopak, jestliže se zajímáme především o přechodnou odezvu, může být prospěšná „dipólová analogie“.

Nejjednodušší uplatnění „bodové analogie“ je při zkoumání hledání rozložení nulových bodů a pólů funkce (12), které by splňovalo předem dané požadavky na průběh modulu podél osy  $j\omega$ . U mnoha zařízení je usnadňují různá více či méně automatizovaná snímací zařízení, kreslicí na papíře či na obrazovce přímo modelovaný průběh. V celé řadě případů je však možno využít vlastností některých konformních zobrazení a řešit aproximační úlohu přímo (bližší viz např. [4] a [5]).

Pro vyšetřování přechodných odezev lineárních dynamických soustav byla zkonstruována zařízení, opírající se o „dipólovou analogii“. Jsou však dosti složitá, umožňují především empirické řešení aproximační úlohy opakovanou analýzou, a proto nenalezla většího rozšíření.

V procesu syntézy je velmi častou úlohou řešení algebraické rovnice vyššího stupně, především v podobě  $P(p)/Q(p) + C = 0$  kde  $P(p)$  i  $Q(p)$  jsou mnohočleny s reálnými koeficienty a  $C$  je konstanta. I když potenciální analogie nemohou soutěžit s možnostmi současných numerických postupů naprogramovaných na samočinné počítače ani co do přesnosti, ani co do rychlosti řešení, může mít předběžný odhad polohy kořenů získaný modelováním jistý význam pro úsporu strojního času a kromě toho může přispět k objasnění hlubších souvislostí a zákonitostí v celé úloze. Lze říci, že téměř v každé etapě procesu syntézy existují podmínky pro rozumné využití principu potenciálních analogií (např. při rozboru parazitních vlivů a ztrát, při vyšetřování citlivosti přenosových vlastností soustavy na změnu jistých parametrů apod.). Není cílem tohoto článku se jimi podrobněji zabývat (bližší viz např. [4] a [5]).

Všimněme si však ještě některých možností, skýtaných metodou potenciálních analogií v teorii signálů. Pro studium přenosových vlastností sdělovacích i regulačních soustav jsou zvláště závažné modulované signály, kde vlastní informace je předávána prostřednictvím nosného kmitočtu. Uvažujme nejjednodušší případ amplitudové modulace. Označíme-li  $v(t)$  vlastní signál, pak výstup z modulátoru s nosným kmitočtem  $\omega_0$  bude

$$(15) \quad v_m(t) = v(t) \sin \omega_0 t.$$

Frekvenční vlastnosti tohoto signálu zjistíme pomocí Laplaceovy transformace

$$(16) \quad F_m(p) = \mathcal{L}\{v_m(t)\} = \frac{1}{2j} [F(p - j\omega_0) - F(p + j\omega_0)],$$

kde  $F(p) = \mathcal{L}\{v(t)\}$  je Laplaceův obraz vstupního signálu  $v(t)$ . Jestliže tedy známe rozložení nul a pólů funkce  $F(p)$ , můžeme postupovat při hledání nulových bodů a pólů funkce  $F_m(p)$  (které potřebujeme pro její namodelování) takto:

Nulové body a póly funkcí  $F(p - j\omega_0)$  a  $F(p + j\omega_0)$  dostaneme z původních zřejmě pouhým posunutím. Póly obrazu  $F_m(p)$  se budou pak shodovat s póly obou z nich. Zbývá tedy určit polohu nulových bodů výrazu  $F(p - j\omega_0) - F(p + j\omega_0)$ , což však vede k úloze nalézt průsečík čar

$$\left| \frac{F(p - j\omega_0)}{F(p + j\omega_0)} \right| = 1$$

s čarami

$$\text{Arg} \frac{F(p - j\omega_0)}{F(p + j\omega_0)} = 2v\pi,$$

kde  $v = 0, 1, 2, \dots$ . To je však jen modifikace úlohy, o níž jsme již hovořili.

Podobným způsobem je možno řešit i otázky demodulace amplitudově modulovaných signálů, i jejich průchod určitou soustavou (viz např. [6] či [7]). Po jistých úpravách je možno tohoto přístupu užít i pro rozbor jiných způsobů modulace.

## 5. ZÁVĚR

Metody modelování pomocí potenciálních analogií se od jiných metod řešení fyzikálních a technických problémů liší mj. svou dvojitou možností uplatnění. Kromě přímého použití jako výpočtových prostředků mají totiž značný význam pro celou řadu teoretických úvah jako způsob přístupu k dané úloze. Přitom bývá využíváno pouze formálně shodného aparátu pro popis dvou různých jevů a k vytváření vlastního fyzického modelu vůbec nemusí dojít. (Příkladem zde mohou být právě způsoby řešení některých aproximačních úloh při syntéze lineárních soustav.) Je pravděpodobné, že právě toto hledisko by při oceňování významu této metodiky mělo být nejzávažnější, protože právě zde je naděje na prohlubování dosavadních a hledání nových aplikací. Ze zde naznačených možností se zdají zvláště slibná uplatnění v teorii signálů, kde mohou přispět k úplnějšímu a přesnějšímu rozboru signálové situace v nových složitých sdělovacích i regulačních soustavách.

(Došlo dne 31. srpna 1964.)

## LITERATURA

- [1] Karplus W. J.: Analog Simulation. McGraw-Hill Book Co., New York 1958.
- [2] D'Atri M. L., Pellegrini V.: Analisi e sintesi dei circuiti elettrici con la vasca elettrolitica. Note Recensionali Notizie 6 (1957), 305—326.
- [3] Novák M.: Některé druhy konformních zobrazení, užívané při řešení lineárních obvodů metodou potenciálních analogií. Výzkumná zpráva ÚRE ČSAV č. Z-24. Praha 1958.

- [4] Novák M.: Metody syntézy filtrů pomocí potenciálních analogií. Výzkumná zpráva ÚRE ČSAV č. Z-32. Praha 1959.
- [5] Novák M.: O syntéze filtrů pomocí potenciálních analogií. Slaboproudý obzor 21 (1960), č. 2, 83—88.
- [6] Smith J. O.: Feedback Control Systems. McGraw-Hill Book Co., New York 1958.
- [7] Čížek V., Novák M.: Příspěvek k teorii přenosu TV soustavy. Výzkumná zpráva ÚRE č. Z-139, Praha 1964.

---

SUMMARY

---

## Potential Analogies

MIRKO NOVÁK

In many fields of science the analysis of the studied phenomena is being carried out by means of models. One of the methods which have a very broad region of applications is the modelling on the principle of potential analogies. In this way it is then possible to solve problems on the one hand from a series of technological branches, on the other hand to build up a common link with such lines which seemingly have no relation one to the other.

In the present paper the principle of potential analogies method will be described and its mathematical principles starting from partial differential equations (Laplace's, diffuse, or wave). The attention is here also dedicated to important procedures of technical realization of this modelling method. There are shown as well several possibilities of its application especially in electro engineering, in the theory of automatic control systems, circuit theory, signal theory, etc.

*Inž. Mirko Novák, CSc., Ústav radiotechniky a elektroniky ČSAV, Lumumbova 1, Praha 8 - Kobylisy.*