KYBERNETIKA ČÍSLO 2, ROČNÍK 1/1965

Logické sítě a logické paradoxy

VÁCLAV PINKAVA

Práce je pokusem o formální popis logických paradoxů logickými sítěmi. Na několika příkladech je ukázáno použití zavedeného formálního popisu.

V článku se chceme zabývat otázkami logických paradoxů z hlediska průběhu úvahy, která je charakterizuje. Na základě tohoto pokusu dospějeme k některým závěrům, které osvětlují povahu úloh zvrhajících se za určitých okolností v paradoxy. Tak je náš přístup hraničním, neboť se zabývá logickou otázkou z hlediska v jistém smyslu psychologizujícího. Jelikož je při popisu použito formálních prostředků z teorie logických sítí, spadá tento přístup nebo se alespoň dotýká oblasti kybernetiky.

VÝCHOZÍ POZOROVÁNÍ

Rozebíráme-li situaci vznikající při průběhu úvahy o úloze zadávající paradox, pozorujeme tuto charakteristiku:

Výsledek jednoho kroku (etapy) úvahy konstituuje podmínku nebo předpoklad pro další krok úvahy. V tomto dalším kroku vede úvaha k opačnému (kontradiktorickému) výsledku vzhledem k výsledku prvního kroku. Tento výsledek se stává podmínkou pro další (třetí) krok úvahy, jehož výsledek je opět v nesouhlase s výsledkem druhého kroku a v souhlase s výsledkem prvého kroku, atd.

Po určitém konečném počtu kroků od úvahy upustíme, konstatujíce, že tato úloha je paradoxem. Virtuálně by ovšem úvaha mohla pokračovat do nekonečna, přičemž výsledky dvou následujících kroků úvahy by byly vždy navzájem kontradiktorické. Každý krok úvahy má stejnou implicitní logickou strukturu (viz např. [1], § 11, str. 37 (C), kde se rozebírá Russell-Zermelův paradox).

Uvedenými charakteristikami se paradoxní úloha liší jednak od sofismu, jednak od sporu. Při sofismu odhalíme vždy chybu resp. dvojznačnost některých pojmů, zadaných v určitém (většinou přirozeném) jazyce tak, že jeden termín značí více pojmů. Při sporu stanovíme určité výchozí předpoklady, provedeme vhodnou úvahu a zjistíme, že výsledek úvahy neguje stanovené předpoklady. Prohlásíme tedy výchozí předpoklady za neudržitelné a jejich negaci za platnou. Při tomto předpokladu je pak výsledek úvahy vždy ve shodě s předpokladem. Při paradoxu však negace výchozích předpokladů, učiněná dalším výchozím předpokladem, vede opět k negaci tohoto nového předpokladu, resp. k aserci původního předpokladu. Pokusíme se stanovit v čem spočívá tato vlastnost úloh vedoucích k paradoxu.

FORMÁLNÍ POPIS

Vyjdeme z toho, že průběh úvahy při jakémkoli logickém paradoxu lze popsat logickou sítí L, která splňuje tyto podmínky:

a) Její rovnice jsou tvaru:

$$\begin{cases} z(t) = \varphi(x(t), q(t)), \\ q(t+1) = z(t), \end{cases}$$

při čemž všechny proměnné jsou binární.

b) Lze udat takovou hodnotu $x(t) = k$, že L má toto chování: Každá vstupní posloupnost $x(1), x(2), \ldots, x(t), \ldots$, kde

$$x(t) = k \quad \text{pro} \quad t \geqq 1,$$

odpovídá výstupní posloupnosti $z(1), z(2), z(3), \ldots, z(t)$, pro niž platí

$$z(t) \not\equiv z(t+1) \quad \text{pro} \quad t \geqq 1.$$

Mohli bychom zavést kritérium paradoxnosti P výrokem

$$P \equiv \Lambda_t[(t \geqq 1) \,\&\, (z(t) \not\equiv z(t+1))]$$

a předpokládat, že jestliže $P = 1$, chování sítě L se zastaví. Tím bychom vyhověli realističtějšímu pojetí, že řešitel paradoxní úvahy od uvažování upustí, jakmile zjistí, že úloha je paradoxem. Inteligentní osoba k tomu dospěje již po dvou krocích. To však nic nemění na podstatě úlohy zadávající paradox, kdy by bylo možno pokračovat v uvažování neomezeně dlouho a nikdy nedospět k definitivnímu jednoznačnému závěru.

Na příkladech ukážeme oprávněnost v předpokladu pro popis úvahy při paradoxu. Za účelem zjednodušení vyjadřování v dalším postupu zavedeme některé termíny.

Definice 1. *Počátečním slovem $\xi\eta$ nazveme každý pár hodnot*

$$x(t), \quad q(1), \quad (t \geqq 1).$$

Definice 2. *Úvahou $'L$ nazveme množinu všech konečných (resp. potenciálně nekonečných) chování sítě L při počátečních slovech $\xi\eta$ a jen při nich. Pak budeme říkat, že síť L provádí nebo splňuje úvahu L.*

Definice 3. *Instancí úvahy L nazveme chování sítě L závislé na určitém $\xi\eta$ a jen na něm, tj. jestliže se síť L začíná chovat při určitém $q(1) = \eta$ a určitém zafixovaném vstupu $x(t) = k = \xi$.*

Je zřejmé, že úvaha L může mít nanejvýše 4 instance. Instance označíme čísly odpovídajícími počátečním slovům $\xi\eta$ chápaným jako binární zápisy čísel 0 až 3.

Definice 4. *Úlohu, vedoucí k takovým úvahám, že je lze formálně popsat úvahou L nazveme situací.*

Je-li zadání úlohy takové, že připouští formální popis průběhu úvahy při jejím řešení pomocí všech čtyř instancí úvahy L, budeme mluvit o *úplné situaci*. V opačném případě je situace *neúplná*. Budeme někdy také mluvit o *instancích situace*. V tom případě budeme mít na mysli určitou etapu úvahy při řešení situace, která je popsatelná jednou z instancí úvahy L.

Definice 5. *Úvaha L je q-diskriminabilní, jestliže při $P = 0$ zároveň platí, že $z(t) = q(1)$ pro každé $t \geqq 1$.*

Definice 6. *Úvaha L splňuje schema A (jest úvahou $L(A)$), je-li q-diskriminabilní a zároveň $P = 1$ právě při dvou instancích.*

Konsekvence definice 6. Je-li úvaha L úvahou $L(A)$, pak při úplné situaci vedou její instance ke třem druhům výsledků, totiž ke dvěma alternativním a k dilematu (paradoxu).

Zřejmě platí: při instancích pro které platí $P = 0$, je vzhledem ke q-diskriminabilitě $q(1) = z(t)$. To jsou právě dvě instance. Při dalších dvou instancích jest $P = 1$, tedy je zde paradox.

Tvrzení 1. *Logická síť L může splňovat úvahu $L(A)$ tehdy a jen tehdy, platí-li buď*

$$\varphi(x(t), q(t)) = (x(t) \equiv q(t))$$

anebo

$$\varphi(x(t), q(t)) = (x(t) \not\equiv q(t)) .$$

Důkaz. Aby síť L mohla splňovat úvahu $L(A)$, musí být dle definice 6 funkční vztah $\varphi(x(t), q(t))$ zadán takovou funkcí $\varphi(p, q)$, aby zároveň platilo $\varphi(k, q) = \bar{q}$ a $\varphi(\bar{k}, q) = q$. Zvolíme-li $k = 0$ (tedy $\bar{k} = 1$) a zkonstruujeme příslušnou tabulku, vidíme, že funkce o daných vlastnostech je ekvivalence. Při opačné volbě hodnoty k dospějeme stejnou metodou k nonekvivalenci. Tím je důkaz podán.

Poznámka. Funkcí, majících první vlastnost, totiž $\varphi(k, q) = \bar{q}$, jest mezi dvouargumentovými výrokovými funkcemi právě šest, jak se přesvědčíme prohlédnutím tabulek jejich průběhů. Uvádíme je zde v té formě, že zároveň ukážeme příslušnou hodnotu k, přičemž ovšem v podobě, jak jsou zapsány, se stávají vlastně jednoargumentovými. Jsou to:

$$(0 \leftarrow q) = \bar{q}\,, \quad (0 \equiv q) = \bar{q}\,, \quad (0 \cdot\!|\!\cdot q) = \bar{q}\,,$$
$$(1 \nleftrightarrow q) = \bar{q}\,, \quad (1 \not\equiv q) = \bar{q}\,, \quad (1 \mid q) = \bar{q}\,.$$

Vidíme však, že ostatní čtyři funkce, kromě dvou uvedených v tvrzení 1, mají tu vlastnost, že $\varphi(\bar{k}, q) =$ konst, tudíž nesplňují podmínku q-diskriminability pro síť $L(A)$.

Konsekvence tvrzení 1. Každá neúplná situace je popsatelná úvahou $L(A)$. Zřejmě, je-li situace neúplná, pak některé instance se na ni nevztahují. Jestliže úvaha $L(A)$ popisuje průběh úvahy při úplné situaci popisuje tím spíše některou ze čtyř instancí, charakterizujících neúplnou situaci. Naopak je zřejmé, že úplná situace je popsatelná pouze úvahou $L(A)$. Neúplná situace je kromě toho popsatelná jinou úvahou L. Např. má-li situace jen dvě instance, z nichž jedna vede k $P = 1$, je popsatelná také úvahou splňovanou sítí L, pro jejíž přepínač platí: $\varphi(k, q) = \bar{q}$, přičemž podmínka q-diskriminability nemusí být splněna. Jde totiž zřejmě o takovou situaci, pro niž jsou dána jen dvě počáteční slova, a to $k\eta$ a $\bar{k}\eta$, a jest tedy vždy možno zvolit takové η (hodnotu $q(1)$), aby platilo $\varphi(\bar{k}, \eta) = \eta$.

Tvrzení 2. *Úvaha $L(A)$ jest homomorfní s chováním sítě L_1 o kánonických rovnicích:*

$$\left.\begin{aligned}
&(1) \quad & x_1'(t) &= x_1(t) \vee \xi_1(t)\,,\\
&(2) \quad & x_2'(t) &= x_2(t) \vee \xi_2(t)\,,\\
&(3) \quad & y(t) &= (x_1'(t) \equiv q_1(t))\,\&\,(x_2'(t) \equiv q_2(t))\,,\\
&(4) \quad & z_1^*(t) &= (q_1(t) \equiv y(t))\,,\\
&(5) \quad & z_2^*(t) &= (q_2(t) \equiv y(t))\,,\\
&(6) \quad & q_1(t+1) &= z_1(t)\,,\\
&(7) \quad & q_2(t+1) &= z_2(t)\,,\\
&(8) \quad & \xi_1(t+1) &= x_1'(t)\,,\\
&(9) \quad & \xi_2(t+1) &= x_2'(t)
\end{aligned}\right\} L_1$$

za těchto podmínek: a) *jsou dány počáteční podmínky:*

$$x_1(1) = x_1'(t)\,, \quad x_2(1) = x_2'(t)\,,$$
$$q_1(1) \not\equiv q_2(1)\,;$$

b) *zobrazení vstupních, vnitřních a výstupních stavů je zadáno vztahy*

$$x(t) = [x_1'(t) \oplus x_2'(t)]\,,$$
$$q(t) = [q_1(t) \to q_2(t)]\,,$$
$$z(t) = [z_1(t) \to z_2(t)]$$

(*kde $\oplus$ značí buď $\equiv$ nebo $\not\equiv$ a operátor sítě L_1 je podle toho zobrazen přepínačem splňujícím funkci $\not\equiv$ nebo $\equiv$ v síti $L(A)$*).

Důkaz. Jelikož má platit:

$$x_1(1) = x_1'(t)\,,$$
$$x_2(1) = x_2'(t)\,,$$

můžeme paměti ξ_1, ξ_2 nahradit podmínkami

$$x_1(t) = k\,,$$
$$x_2(t) = c\,,$$

kde k a c jsou vhodné konstanty (resp. parametry) vzhledem k uvažované instanci nabývající nezávisle na sobě (v souhlase s instancí) hodnot 0 nebo 1.

Každý pár hodnot $x'_1(t) \frown x'_2(t)$, $z_1(t) \frown z_2(t)$, $q_1(t) \frown q_2(t)$ (kde $\frown$ značí konkatenaci) nazveme *vstupním*, *výstupním*, resp. *vnitřním simultánním slovem* (dvoumístným písmenem) a reprezentujeme tato simultánní slova proměnnými $X(t)$, $Z(t)$, resp. $Q(t)$. Vzhledem ke stanovené počáteční podmínce $q_1(1) \not\equiv q_2(1)$ a rovnicím (3) až (7) jest také $z_1(t) \not\equiv z_2(t)$ a $q_1(t) \not\equiv q_2(t)$ pro každé $t \geqq 1$. Jsou tedy proměnné $Q(t)$ a $Z(t)$ schopny nabývat pouze dvou hodnot každá.

Analyzováním kánonického systému L_1 se dále přesvědčíme o tom, že $Z(t) \equiv \equiv Z(t+1)$ tehdy a jen tehdy, platí-li $x'_1(t) \not\equiv x'_2(t)$. Podmínka $Z(t) \equiv Z(t+1)$ jest tedy splněna jen při dvou hodnotách simultánního slova $X(t)$, totiž pro páry hodnot 01 a 10, kdežto pro 00 a 11 splněna není.

Vedou tedy z tohoto hlediska dvě vstupní simultánní slova k jednoznačnému výsledku a dvě další k dilematu. Proto lze proměnné $X(t)$ přiznat jen dvě hodnoty. Podle toho zobrazíme-li stav $x'_1(t) \frown x'_2(t)$, pro který platí $x'_1(t) \not\equiv x'_2(t)$ hodnotou 0 nebo 1, proměnné $X(t)$ jest třeba nahradit operátor sítě L_1 přepínačem $\equiv$ nebo $\not\equiv$.

Tím dostáváme síť L'_1 o rovnicích:

$$\begin{aligned} Z(t) &= X(t) \oplus Q(t)\,, \\ Q(t+1) &= Z(t) \end{aligned}$$

(kde $\oplus$ má shora definovaný význam). Zřejmě je tato síť ekvivalentní s jednou nebo s druhou sítí $L(A)$ (srovnej tvrzení 1). Zobrazení je dále zřejmě jednoznačné, ale jen v jednom směru, čímž je splněn požadavek homomorfismu. Tím je důkaz podán.

Tvrzení 2'. *Chování sítě L_1 za podmínek tvrzení 2 je izomorfní s chováním abstraktního automatu $\mathfrak{A}$ o vstupních stavech $x = A, B, C, D$, vnitřních stavech $q = \beta, \gamma$ a výstupních stavech $z = b, c$ za podmínky*

$$x(1) = x(t)\,,$$

při zobrazení kanálů a buněk paměti vztahy

$$\begin{aligned} x'_1(t) \frown x'_2(t) &= x(t)\,, \\ q_1(t) \frown q_2(t) &= q(t)\,, \\ z_1(t) \frown z_2(t) &= z(t) \end{aligned}$$

a zobrazení jejich odpovídajících stavů $\varrho_1\varrho_2$ tabulkou:

$\varrho_1\varrho_2$	x	q	z
1 1	A	—	—
1 0	B	β	b
0 1	C	γ	c
0 0	D	—	—

 je-li možné chování automatu $\mathfrak{A}$ reprezentovaváno kánonickou tabulkou:

$x(t)$ \ $q(t)$	β	γ
A	c/γ	b/β
B	b/β	b/β
C	c/γ	c/γ
D	c/γ	b/β

kde zlomek značí vždy příslušné stavy $z(t)/q(t+1)$.

Správnost tvrzení 2′ je zřejmá: Zobrazovací funkce kanálů, buněk a jejich stavů jsou zřejmě vzájemně jednoznačné. Kánonická tabulka automatu $\mathfrak{A}$ je sestrojena v souhlase s chováním L_1 za podmínek tvrzení 2, o čem se snadno přesvědčíme sestrojením kánonické tabulky pro síť L_1.

Tvrzení 2″. *Chování automatu $\mathfrak{A}$ je za podmínek tvrzení 2′ homomorfní s chováním sítě $L(A)$ za podmínek tvrzení 1 při identickém zobrazení vstupního a výstupního kanálu a buňky paměti a při zobrazení stavu automatu $\mathfrak{A}$ stavy sítě $L(A)$ podle vztahů:*

$$x = A \vee D\,, \quad q = \beta\,, \quad z = b\,,$$

$$\bar{x} = B \vee C\,, \quad \bar{q} = \gamma\,, \quad \bar{z} = c\,,$$

a při vyjádření operátoru automatu $\mathfrak{A}$ funktorem $\not\equiv$ nebo $\equiv$ sítě $L(A)$ podle toho, položíme-li $x = 1$ nebo $x = 0$. (Zakódování stavů paměti a výstupu jest libovolné alternativní.)

Důkaz provedeme sestrojením kánonické tabulky sítě $L(A)$ a přenecháme jej čtenáři. Kromě toho, je-li za daných podmínek $\mathfrak{A}$ izomorfní s L_1 a L_1 homomorfní s $L(A)$, je také $\mathfrak{A}$ homomorfní s $L(A)$.

Chování automatu $\mathfrak{A}$ (sítě L_1) za uvažovaných podmínek můžeme interpretovat jako realizaci algoritmu zařazování určitého objektu X, definovaného přítomností nebo nepřítomností jednoho ze dvou znaků, do jedné ze dvou disjunktních podmnožin S, $\tilde{S}$ dané množiny $M = S \cup \tilde{S}$, z nichž každá, resp. její elementy jsou definovány vždy přítomností právě jednoho ze dvou alternativních znaků. Výstupní stavy automatu $\mathfrak{A}$ (sítě L_1) můžeme pak interpretovat jako výroky: „$X \in S$“, „$X \notin S$“ $\equiv$ $\equiv$ „$X \in \tilde{S}$“.

Tvrzení 3. *Při interpretaci úvahy $L(A)$ jako popisu algoritmu zařazování objektu X do jedné ze dvou disjunktních podmnožin S, $\tilde{S}$, realizovaného automatem $\mathfrak{A}$ (sítí L_1) za příslušných podmínek, vede k paradoxu taková instance úvahy $L(A)$, pro kterou lze v této souvislosti přijmout interpretaci hodnoty $x(t) = k$ jako výroku „$X \notin M$“.*

Důkaz. Uvažme kánonickou tabulku automatu $\mathfrak{A}$. Vidíme, že výstup nabývá v každém taktu jiné hodnoty jen tehdy, je-li dán vstup $A(t)$ nebo $D(t)$. V síti L_1 tomu odpovídají vstupní simultánní slova (dvoumístná písmena) 11 a 00. Jestliže vnitřní stavy automatu $\mathfrak{A}$ jsou jen dva, plyne z toho, že nejednoznačný (v každém taktě se měnící) výsledek dává automat $\mathfrak{A}$ jen tehdy, není-li možno objekt X zařadit do žádné z obou podmnožin množiny (reprezenzovaných příslušnými stavy paměti). Ještě lépe to vysvitne při uvažování chování sítě L_1 za daných podmínek, kde stavy paměti vyjadřují zřejmě znaky elementů konstituujících podmnožiny S, $\bar{S}$. Nemá-li objekt X znaky, dané počátečním stavem paměti, „zařadí" jej L_1 do druhé v úvahu připadající množiny. Nevyhovuje-li ani tam, zařadí ho do první atd.

Úvahu $L(A)$ lze chápat jako popis práce sítě L_1 (automatu $\mathfrak{A}$) za daných podmínek, a přiznat jí slovní interpretaci asi tohoto smyslu:

„Patří-li objekt X do M, pak jej automat $\mathfrak{A}$ zařadí jednoznačně do S nebo do $\bar{S}$, nepatří-li X do M bude je automat $\mathfrak{A}$ zařazovat v každém taktu do jiné ze dvou daných podmnožin."

Zřejmě lze z tohoto hlediska hodnotu $x(t) = k$ v úvaze $L(A)$ interpretovat jako výrok: „$X \notin M$".

PŘÍKLADY POPISU PARADOXŮ

I. Paradox misionáře

Náčelník kanibalů řekl misionáři: „Budeš buď uvařen nebo upečen. Uhodneš-li, co s tebou hodlám udělat, budeš uvařen, neuhodneš-li to, budeš upečen." Jak se má kanibal zachovat, řekne-li misionář: „Budu upečen."?

Situace je úplná má všechny čtyři instance (kanibal může mít dva různé počáteční záměry a misionář může hádat dvojím způsobem) a je popsatelné úvahou $L(A)$. Interpretujeme-li x jako výrok misionáře, q jako původní záměr kanibala a z jako ortel nad misionářem pro určitou etapu (krok) úvahy, tj. takt sítě, pak při síti $L(A)$ s ekvivalencí a při interpretaci hodnot proměnných $x = q = z = 1$ jako příslušných výroků týkajících se vaření, povedou k jednoznačnému řešení instance 2 a 3, kdežto instance 0 a 1 povedou k paradoxu. Paradox zde vzniká zřejmě logickou strukturou úlohy, která zahrnuje podmínku shody nebo neshody záměru kanibala a odhadu misionáře pro pečení resp. vaření misionáře. Hádá-li však misionář: „Budu upečen", pak jestliže kanibal měl původně záměr misionáře péci, misionář uhodl a má tedy být vařen. Tím neuhodl a má být pečen, ale tím uhodl atd. Možnost vztáhnout odhad misionáře k výsledku dalšího kroku úvahy, tj. ne pouze prvního kroku, je vyjadřitelná právě sítí $L(A)$, která má paměť (zpětnou vazbu). Tohoto typu jsou všechny tzv. *sémantické paradoxy.*

Zcela stejného typu jako „misionář", je

II. Paradox krokodýla

Krokodýl ukradne dítě a slíbí je vrátit otci jen tehdy uhodne-li otec, co krokodýl zamýšlí s dítětem udělat, tj. vrátit nebo nevrátit. Jak se má krokodýl zachovat, hádá-li otec, že krokodýl dítě nevrátí?

Situace je opět úplná, popsatelná úvahou $L(A)$ při vhodné interpretaci proměnných a jejich hodnot. Od předchozího příkladu se liší, ovšem nepodstatně, tím, že zatímco v předchozím byly dva alternativní výroky, jde zde o výrok a jeho negaci.

III. Paradox čínského mudrce

Císař dá postavit most přes řeku. Na konci mostu čeká kat, který má každého popravit. Každý chodec dostane podmínku: „Neuhodneš-li, co tě čeká na konci mostu, budeš popraven." Filosof zavádí dilema výrokem: „Budu popraven."

Situace je neúplná. Má pouze dva možné výsledky (popravu nebo dilema). Je to dáno tím, že hodnota $q(1)$ je zafixována (každý má být popraven). Je popsatelná úvahou $L(A)$ na síti s nonekvivalencí při interpretaci proměnných: x — výrok chodce, $q = c$ — záměr popraviti, z — výsledek pro etapu (krok), a při interpretaci hodnot $x = q = z = 1$ jako příslušných výroků o popravení.

Vzhledem k neúplnosti situace by ji bylo možno popsat také jinou úvahou L. Např. by to bylo možno učinit chováním (úvahou L) sítě L o rovnicích:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) \mid q(t)\,, \\ q(t+1) &= z(t) \end{aligned}$$

(podmínka q-diskriminability nemusí být splněna).

Na totéž schéma při zafixované hodnotě $x(t)$ lze převést také *Epimedinův paradox*, resp. jeho explicitní formu, *Eubulidův paradox*. Tento paradox je zadán takto: „Tento výrok je lživý. Je tento výrok lživý nebo pravdivý?" Zde má proměnná x interpretaci daného výroku, tj. „tento výrok je lživý" (alternativní hodnota proměnné x by měla interpretaci „tento výrok je pravdivý"), kdežto proměnná q reprezentuje výrok týkající se pravdivosti výroku x. Proměnná z má stejnou interpretaci jako q. Jestliže tuto úlohu vyjádříme úvahou $L(A)$ na síti s ekvivalencí, pak musíme proměnné $x(t)$ přiznat hodnotu 0. Při libovolné z obou možných hodnot q bude vždy paradox. Epimenidova úloha jest zadána vlastně jedním výrokem, který však věcně reprezentuje dva výroky, totiž výrok a výrok o pravdivosti tohoto výroku. Jedině paradoxy typu Epimenidovy úlohy představují samoreferenci výroků. Při paradoxech typu „misionář" nebo „krokodýl" není žádné samoreference a přesto jde o paradoxy. Podmínka pro to, aby úloha byla paradoxem, je splněna tehdy, jestliže průběh úvahy při jejím řešení je popsatelný úvahou L.

Poněkud jiného druhu jsou paradoxy označované někdy na rozdíl od předchozích jako *logické v užším smyslu*. Ukážeme, že jsou převeditelné na totéž schéma jako předchozí, a některé momenty osvětlující povahu jejich vzniku. Jako příklad uvedeme

Autorem tohoto paradoxu je B. Russell. Ve vesnici je holič, který holí všechny a jen ty (holené) osoby, které se neholí samy. Holí se holič sám?

Situaci lze chápat jako úplnou v definovaném smyslu a popsatelnou úvahou $L(A)$. Proměnná q bude mít interpretaci „osoba se holí sama" nebo „osoba je holena holičem", při čemž každému z těchto výroků přiřadíme libovolně jednu z hodnot proměnné q. Stejnou věcnou interpretaci bude mít proměnná z a její hodnoty.

K jednoznačnému řešení vede zde každá úvaha (instance), při které nejde o holiče. Uvažujeme-li o holiči, jest úloha paradoxem. Vidíme, že proměnná x a její hodnoty budou mít v úvaze interpretaci „uvažovaná osoba je holičem" nebo „uvažovaná osoba není holičem". Použijeme-li při tom k zobrazení úvahy sítě $L(A)$ s ekvivalencí, bude $x(t) = 0$ znamenat první z uvedených výroků. Z hlediska homomorfního popisu chování automatu $\mathfrak{A}$ (sítě L_1) úvahou $L(A)$, v souhlase s tvrzeními 2, 2′, 2″, 3 snadno nahlédneme, že výrok „uvažovaná osoba je holičem" lze v dané souvislosti chápat jako výrok: „Tato osoba nepatří do množiny osob holených buď jen holičem nebo jen vlastní rukou." Bude-li v síti L_1 vnitřní simultánní slovo 10 znamenat znaky třídy osob holených holičem a slovo 01 znaky třídy osob, jež se holí samy, můžeme objekt „holič" reprezentovat v síti L_1 vstupem 11. Zřejmě za těchto podmínek dojde v L_1, resp. v $\mathfrak{A}$, ke střídání hodnoty výstupu v každém taktu, čili k paradoxu.

Avšak ke stejnému chování v síti L_1 (za příslušných podmínek) povede také vstupní simultánní slovo 00. Při právě uvažované věcné interpretaci by tento vstup reprezentoval osobu, která se neholí vůbec. V tomto případě bychom však úlohu vůbec nezačali řešit, jelikož ihned nahlížíme absurdnost jejího zadání. V případě holiče, kde je situace zcela analogická, toto nenahlédneme a proto jsme ochotni začít úlohu řešit. V tomto případě se náš CNS chová přesně jako jednoduchý automat $\mathfrak{A}$ (logická síť L_1), totiž pokusí se objekt zařadit do jedné z obou možných tříd a když tam nevyhovuje, snaží se jej zařadit do druhé, zde opět nevyhovuje tedy jej zařadí do první atd.

Objekt „holič" je ovšem logicky možný. Nic nebrání tomu, aby někdo kdo je holičem se neholil sám. Pouze množina, kam má být holič zařazen je definována tak, že objekt „holič" do ní nepatří (podobně jako objekt, který se neholí vůbec).

V některých paradoxech tohoto typu jest však objekt ležící v průniku uvažovaných tříd logicky nemožný. Toho druhu je např.

V. Paradox starosty

Každá obec musí mít starostu. Někteří starostové nebydlí ve své obci. Byl vydán rozkaz, aby tito „externí" starostové přesídlili na určité místo. Je jich tolik, že je zde ustavit obec, která musí mít starostu. Kde má bydlit starosta této obce?

Situace je zcela analogická jako právě v předchozím případě. Je úplná, popsatelná úvahou $L(A)$ a konstanta působící v síti $L(A)$ paradoxní chování bude mít interpretaci jako výrok „jde o starostu externích starostů", kdežto hodnoty proměnné q

budou označovat příslušné domicily. Lze ji opět chápat jako popis chování automatu $\mathfrak{A}$ (sítě L_1), který má příslušného starostu zařadit buď do obce externích starostů nebo do jeho komplementu do všech obcí dané země. V tomto případě však dvě vstupní simultánní slova sítě L_1, totiž 00 a 11, označují jeden a týž logicky nemožný objekt, poněvadž má-li jeden z obou znaků hodnotu 1, musí mít druhý hodnotu 0 a naopak. Lze je slovně interpretovat např. jako znaky „býti externím starostou" a „bydliti ve vlastním starostenství". Proto lze situaci zařazování v tomto případě vyjádřit adekvátně přímo úvahou $L(A)$, jak snadno nahlédneme.

Paradoxů uvedeného typu je známo mnoho. Omezili jsme se úmyslně na takové úlohy, kde pojmy nebo termíny, s nimiž úloha operuje, mají zřejmý význam daný jejich běžným používáním. Paradoxy abstraktní teorie množin mají formálně stejnou logickou strukturu, ale řešení otázky proč k nim dochází, se týká kromě zjištění formální struktury úloh vedoucích k paradoxům ještě výstavby příslušných matematických pojmů; proto rozšíření uvedeného přístupu na matematické paradoxy přenecháváme, pokud by se ukázal vhodným, povolanějším odborníkům.

Na základě znalosti logické struktury úloh vedoucích k paradoxu, lze konstruovat složité sémantické paradoxy, které dosud nejsou nikde uváděny, např. úlohy, kdy hádá větší počet osob apod. O těchto úlohách bude pojednáno jindy.

Ukázali jsme, že běžné sémantické i tzv. logické paradoxy mají stejný základní princip, resp. jsou převeditelné na jedno základní schéma. Dále jsme uvedli, že tzv. logické paradoxy spočívají v mylném zařazování určitého elementu do třídy, kam tento a priori nepatří, pokud tento fakt včas nenahlédneme a začneme úlohu řešit. Dále bylo ukázáno, že pro některé logické otázky se adekvátním prostředkem jeví aparát teorie logických sítí, zejména v tom smyslu, že lze jeho pomocí vyjádřit struktury úvah, jejichž určitá etapa závisí na minulé etapě téže úvahy.

(Došlo dne 24. dubna 1964.)

LITERATURA

[1] Kleene S. C.: An Introduction to Metamathematics. Amsterdam 1962.
[2] Kobrinskij N. E., Trachtenbrot B. A.: Vvedenije v teoriju konečnych avtomatov. Moskva 1962.

Logical Nets and Logical Paradoxes

VÁCLAV PINKAVA

The course of ratiocination about a problem turning into a paradox is described in terms of behaviour of a certain type of logical nets under special circumstances.

Under these conditions the known paradoxes appear to exhibit a uniform formal structure. The nature of the so called semantic paradoxes (the 'crocodile' type) and the so called logical ones (the 'barber' type) becomes explicit when using these means of description. Only one type of paradoxes has the property of selfreference, the other types, while being paradoxes are lacking this property. The paradox of the 'barber' type is conditioned by an intention to locate an element not belonging to a set into this particular set.

The semantic paradoxes are constituted by a peculiar logical structure of these problems, made explicit in the article.

Dr. Václav Pinkava, Psychiatrická klinika KU, Ke Karlovu 11, Praha 2.