KYBERNETIKA ČÍSLO 1, ROČNÍK 1/1965

# Identifikace lineárních soustav s násobnými póly

PANE VIDINČEV

Článek pojednává o zjišťování dynamických vlastností lineárních spojitých soustav s násobnými (obecně komplexními) póly. Uvažuje se zde také vliv šumu, který zkresluje výstupní signál. V článku je také zmínka o způsobu řešení soustav lineárních rovnic typu (20) nebo (30).

Metodika a pojetí problematiky identifikace lineárních soustav je v práci [2] založena na předpokladu, že vyšetřovaná soustava má jednoduché póly. Z této práce není zřejmé, jak celá záležitost vypadá, když toto omezení není splněno, tj. když obecně každý pól analyzované soustavy je nějaké násobnosti.

Bude-li znám postup jak zjišťovat dynamiku lineárních soustav s násobnými póly, bude také zřejmé, jak postupovat, když tyto póly jsou jednoduché, neboť to bude speciální případ je-li násobnost všech pólů stejná a rovná jedné.

V této práci předpokládáme, že přenos $K(p)$ vyšetřované lineární soustavy se soustředěnými konstantními parametry má obecně komplexní póly $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ postupně s násobnosti $N_1, N_2, \ldots, N_\mu$. Obecně potom bude

$$K(p) = \frac{\sum_{n=0}^{\overline{m}} B_n p^n}{\prod_{\nu=1}^{\mu} (p + b_\nu)^{N_\nu}} = \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} \frac{A_{\nu j}}{(p + b_\nu)^{N_\nu + 1 - j}}, \tag{1}$$

kde $b_\nu$ a $A_{\nu j}$ jsou obecně komplexní čísla;

$$\operatorname{Re} b_\nu > 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu \tag{2}$$

a kde dále

$$m = \sum_{\nu=1}^{\mu} N_\nu \geqq \overline{m} + 1 \tag{3}$$

je řád vyšetřované lineární soustavy, $m < \infty$.

Úkolem je určit číslo $m$ a komplexní čísla $b_\nu$ a $A_{\nu j}$.

Vycházíme z předpokladu, že počáteční podmínky jsou nulové a že vstupní signál $y(t)$ vyšetřované soustavy je skok velikosti $C$, tedy $y(t) = C$. Symbolem $x(t)$ označíme výstupní signál soustavy. Z toho, co bylo uvedeno plyne, že

$$X(p) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \frac{C}{p} \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} \frac{A_{\nu j}}{(p + b_\nu)^{N_\nu+1-j}}\,. \tag{4}$$

Platí však

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p(p + b_\nu)^{N_\nu+1-j}}\right\} = \frac{1}{b_\nu^{N_\nu+1-j}}\left(1 - \mathrm{e}^{-b_\nu t} \sum_{k=0}^{N_\nu-j} \frac{t^k b_\nu^k}{k!}\right),$$

takže potom bude

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(p)\} = C \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} \frac{A_{\nu j}}{b_\nu^{N_\nu+1-j}}\left(1 - \mathrm{e}^{-b_\nu t} \sum_{k=0}^{N_\nu-j} \frac{t^k b_\nu^k}{k!}\right). \tag{5}$$

Uvážíme-li, že platí vztah (2) (že tedy jde o stabilní soustavu), dostaneme z výrazu (5)

$$x(\infty) = C \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} \frac{A_{\nu j}}{b_\nu^{N_\nu+1-j}}\,. \tag{6}$$

Ustálenou hodnotu $x(\infty)$ můžeme z grafu odezvy $x(t)$ vždy odečíst. Pro usnadnění další práce posuňme počátek souřadnic vztahem $\bar{x}(t) = x(\infty) - x(t)$. Podle výrazů (5) a (6) tedy bude

$$\bar{x}(t) = C \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j}\, \mathrm{e}^{-b_\nu t} \sum_{k=0}^{N_\nu-j} \frac{t^k b_\nu^k}{k!}\,, \tag{7}$$

kde jsme pro jednoduchost zápisu zavedli

$$C_{\nu j} = \frac{A_{\nu j}}{b_\nu^{N_\nu+1-j}}\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu;\ j = 1, 2, \ldots, N_\nu\,. \tag{8}$$

Úkol, který jsme si postavili – určení čísla $m$, komplexních čísel $b_\nu$ a $A_{\nu j}$ – budeme řešit na začátku této práce takto: vyjdeme z předpokladu, že 1. levá strana (7) je přesně známá a 2. je znám řád $m$ soustavy.

V dalších částech této práce ukážeme (na základě závěrů první části), jak postupovat, když tyto dva předpoklady nejsou splněny, tj. když levá strana vztahu (7) obsahuje šum a když neznáme číslo $m$, které je třeba určit.

Zaveďme si

$$t = \alpha h\,, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{9}$$

kde $h$ je velikost korku dělení na ose $t$.

V lineární kombinaci

$$L_1(D_s) = \sum_{s=0}^{m} D_s \bar{x}(\alpha h + sh) \tag{10}$$

hledejme neznámé $D_s$ tak, aby byla splněna podmínka

$$L_1(D_s) = 0 . \tag{11}$$

Napřed najdeme postačující podmínku k tomu, aby byla splněna rovnost (11). Dosazením do výrazu (10) za $\bar{x}(\alpha h + sh)$ ze vztahu (7) dostaneme

$$L_1(D_s) = C \sum_{s=0}^{m} D_s \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{b_\nu^k}{k!} (\alpha h + sh)^k \, \mathrm{e}^{-b_\nu(\alpha h + sh)} =$$

$$= C \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{b_\nu^k}{k!} \sum_{s=0}^{m} D_s (\alpha h + sh)^k \, \mathrm{e}^{-b_\nu(\alpha h + sh)} . \tag{12}$$

Uvědomíme-li si, že

$$(\alpha h + sh)^k \, \mathrm{e}^{-b_\nu(\alpha h + sh)} = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial b_\nu^k} \mathrm{e}^{-b_\nu(\alpha h + sh)} , \tag{13}$$

nabude potom vztah (12) tento tvar:

$$L_1(D_s) = C \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{b_\nu^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial b_\nu^k} \mathrm{e}^{-\alpha h b_\nu} \sum_{s=0}^{m} D_s \mathrm{e}^{-shb_\nu} . \tag{14}$$

Z výrazu (14) plyne, že k tomu, aby byla splněna podmínka (11), stačí, aby

$$\sum_{s=0}^{m} D_s \mathrm{e}^{-shb_\nu} = 0 , \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu . \tag{15}$$

Označme si

$$\mathrm{e}^{-hb_\nu} = z_\nu , \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu . \tag{16}$$

Pro $D_0 = 1$ dostaneme z výrazu (15), dosadíme-li do něj výraz (16), tuto soustavu rovnic

$$1 + \sum_{s=1}^{m} D_s z_\nu^s = 0 , \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu . \tag{17}$$

Soustavě rovnic (17) vyhovuje řešení rovnice

$$1 + \sum_{s=1}^{m} D_s z^s = 0 , \tag{18}$$

která má $m$ kořenů

$$z = z_n , \quad n = 1, 2, \ldots, m , \tag{19}$$

z nichž podle předpokladu jen $\mu$ je navzájem různých.

Tím je celá problematika vyřešena, neboť na základě požadavku (11) napíšeme soustavu rovnic (pro $D_0 = 1$)

$$
(20) \quad \begin{cases}
\bar{x}(\alpha h) + \bar{x}(\alpha h + h)\, D_1 + \bar{x}(\alpha h + 2h)\, D_2 + \ldots + \bar{x}(\alpha h + mh)\, D_m = 0\,, \\
\bar{x}(\alpha h + h) + \bar{x}(\alpha h + 2h)\, D_1 + \bar{x}(\alpha h + 3h)\, D_2 + \ldots + \bar{x}(\alpha h + mh + h)\, D_m = 0\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\bar{x}(\alpha h + mh - h) + \bar{x}(\alpha h + mh)\, D_1 + \ldots + \bar{x}(\alpha h + 2mh - h)\, D_m = 0
\end{cases}
$$

ze které určíme neznámé $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Dosazením těchto $D_s$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ do výrazu (18) a řešením tohoto vztahu dostaneme kořeny (19); tím také zjistíme, které kořeny jsou stejné. Různých kořenů $z_\nu$ bude celkem $\mu$. Dosazením těchto různých kořenů $z_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \mu)$ do vztahu (16) najdeme jako řešení neznámé $b_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \mu)$.

Tím bychom tedy měli určena komplexní čísla $b_\nu$ i jejich násobnosti $N_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \mu)$.

Pro určení neznámých $A_{\nu j}$ si musíme vztah (7) poněkud upravit neboť čísla $b_\nu$ jsou komplexní. Uvědomíme-li si, že

$$
(20') \qquad b_\nu^k \mathrm{e}^{-b_\nu t} = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k}\, \mathrm{e}^{-b_\nu t}\,,
$$

můžeme výraz (7) napsat takto

$$
(21) \qquad \bar{x}(t) = C \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{t^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k}\, \mathrm{e}^{-b_\nu t}\,.
$$

Čísla $A_{\nu j}$ můžeme nyní určit např. takto: ze soustavy rovnic

$$
(22) \qquad \begin{aligned}
\bar{x}(t_\beta) &= C\, \mathrm{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{t_\beta^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t_\beta^k}\, \mathrm{e}^{-b_\nu t_\beta} \right\}, \\
&\qquad\qquad \beta = 1, 2, \ldots, m\,, \\
0 &= I_m \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{t_\beta^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t_\beta^k}\, \mathrm{e}^{-b_\nu t_\beta} \right\}
\end{aligned}
$$

určíme $\mathrm{Re}\, C_{\nu j}$ a $\mathrm{Im}\, C_{\nu j}$; pak podle vztahu (8) určíme komplexní čísla $A_{\nu j}$.

Protože

$$
\begin{aligned}
C_{\nu j} &= \mathrm{Re}\, C_{\nu j} + i\, \mathrm{Im}\, C_{\nu j}\,, \\
b_\nu &= \mathrm{Re}\, b_\nu + i\, \mathrm{Im}\, b_\nu\,,
\end{aligned}
$$

nabude soustava rovnic (22) tohoto tvaru 

$$\bar{x}(t_\beta) = C \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} \operatorname{Re} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{t_\beta^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t_\beta^k} e^{-t_\beta \operatorname{Re} b_\nu} . \cos t_\beta \operatorname{Im} b_\nu + \tag{23}$$

$$+ C \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} \operatorname{Im} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{t_\beta^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t_\beta^k} e^{-t_\beta \operatorname{Re} b_\nu} . \sin t_\beta \operatorname{Im} b_\nu ,$$

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} \operatorname{Im} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{t_\beta^k}{k!} (-1) \frac{\partial^k}{\partial t_\beta^k} e^{-t_\beta \operatorname{Re} b_\nu} . \cos t_\beta \operatorname{Im} b_\nu -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} \operatorname{Re} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{t_\beta^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t_\beta^k} e^{-t_\beta \operatorname{Re} b_\nu} . \sin t_\beta \operatorname{Im} b_\nu ,$$

přitom v soustavě rovnic (23) je $\beta = 1, 2, \ldots, m$.

## PŘÍTOMNOST ŠUMU

Při praktické analýze dynamiky soustav není splněn ani jeden ze dvou předpokladů, na jejichž platnosti byl vybudován tento teoretický model.

V praxi tedy předem neznáme ani řád $m$ soustavy, kterou vyšetřujeme, ani přesné hodnoty levé strany vztahu (7). Napřed si všimneme poslední skutečnosti a nakonec se vrátíme k problematice určení řádu $m$.

V praxi ve skutečnosti nepracujeme s přesným výstupním signálem $x(t)$, ale se signálem

$$\xi(t) = x(t) + \delta(t) ,$$

tedy také se signálem

$$\xi(t) = \bar{x}(t) + \bar{\delta}(t) , \tag{24}$$

kde $\bar{\delta}(t)$ je chybová funkce, šum. O funkci $\bar{\delta}(t)$ předpokládáme, že její funkční hodnoty v bodech vzájemně dostatečně vzdálených jsou navzájem nezávislé, že dále střední hodnota funkce $\bar{\delta}(t)$ v dostatečně dlouhém intervalu konverguje k nule. Má-li funkce $\bar{\delta}(t)$ tyto vlastnosti (při měření bez poruch a bez systematických chyb jsou splněny tyto vlastnosti), je možno ukázat způsob, jak určit dynamiku soustav.

Rozdělme si základní interval $h$ na $B$ stejných podintervalů. V každém bodě takto provedeného dělení najdeme funkční hodnotu a hledejme, čemu se rovná střední hodnota těchto funkčních hodnot. Označme tuto střední hodnotu symbolem $\hat{\xi}(\alpha h)$. Bude tedy

$$\hat{\xi}(\alpha h) = \frac{1}{B} \sum_{\gamma=0}^{B-1} \xi\left(\alpha h + \frac{\gamma}{B} h\right), \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Protože budeme mít dán průběh $\xi(t)$, operaci (25) můžeme vždy provést, tj. připravit si střední hodnoty $\hat{\xi}(0)$, $\hat{\xi}(h)$, $\hat{\xi}(2h)$, ... na úsecích o velikosti $h$.

*Poznámka*: Volba velikosti tohoto základního intervalu má podstatný vliv na přesnost metody a tedy i na přesnost konečných výsledků. Podle zkušeností autora je $1{,}0/M \leqq h \leqq 1{,}4/M$, kde

$$M = \sum_{\nu=1}^{\mu} N_\nu \operatorname{Re} b_\nu \, .$$

Nyní se podívejme, jak můžeme výraz (25) rozepsat a jaké teoretické závěry z toho plynou. Především dosaďme do výrazu (25) za $\xi(\alpha h + (\gamma/B)\,h)$ ze vztahu (24). Dostaneme

$$\hat{\xi}(\alpha h) = \frac{1}{B}\sum_{\gamma=0}^{B-1} \bar{x}\left(\alpha h + \frac{\gamma}{B}\,h\right) + \frac{1}{B}\sum_{\gamma=0}^{B-1} \bar{\delta}\left(\alpha h + \frac{\gamma}{B}\,h\right). \tag{26}$$

Splňuje-li funkce $\bar{\delta}(t)$ dříve uvedené podmínky, je možno druhý člen na pravé straně výrazu (26) zanedbat. Bude tedy po dosazení za $\bar{x}\,(\alpha h + (\gamma/B)\,h)$

$$\hat{\xi}(\alpha h) = \frac{C}{B}\sum_{\gamma=0}^{B-1}\sum_{\nu=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j}\,\mathrm{e}^{-b_\nu[\alpha h + (\gamma/B)h]}\sum_{k=0}^{N_\nu - j}\frac{\left(\alpha h + \frac{\gamma}{B}\,h\right)^k}{k!}\,b_\nu^k\,. \tag{27}$$

Z lineární kombinace

$$L_2(D_s) = \sum_{s=0}^{m} D_s \hat{\xi}(\alpha h + sh) \tag{28}$$

je možno při splnění podmínky

$$L_2(D_s) = 0 \tag{29}$$

určit čísla $D_s$ řešením soustavy rovnic ($D_0 = 1$):

$$\left\{\begin{aligned}
&\hat{\xi}(\alpha h) + \hat{\xi}(\alpha h + h)\,D_1 + \hat{\xi}(\alpha h + 2h)\,D_2 + \ldots + \hat{\xi}(\alpha h + mh)\,D_m = 0\,,\\
&\hat{\xi}(\alpha h + h) + \hat{\xi}(\alpha h + 2h)\,D_1 + \hat{\xi}(\alpha h + 3h)\,D_2 + \ldots + \hat{\xi}(\alpha h + mh + h)\,D_m = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\hat{\xi}(\alpha h + mh - h) + \hat{\xi}(\alpha h + mh)\,D_1 + \hat{\xi}(\alpha h + mh + h)\,D_2 + \ldots +\\
&\qquad\qquad + \hat{\xi}(\alpha h + 2mh - h)\,D_m = 0\,.
\end{aligned}\right. \tag{30}$$

K splnění podmínky (29), stačí, aby platil vztah (15). A skutečně, dostaneme

$$\begin{aligned}
L_2(D_s) &= \frac{C}{B}\sum_{s=0}^{m} D_s \sum_{\gamma=0}^{B-1}\sum_{\nu=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j}\mathrm{e}^{-b_\nu[\alpha h + sh + (\gamma/B)h]}\sum_{k=0}^{N_\nu - j}\frac{\left(\alpha h + sh + \frac{\gamma}{B}\,h\right)^k}{k!}\,b_\nu^k =\\
&= \frac{C}{B}\sum_{\gamma=0}^{B-1}\sum_{\nu=1}^{\mu}\sum_{j=0}^{N_\nu} C_{\nu j}\sum_{k=0}^{N_\nu - j}\frac{b_\nu^k}{k!}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial b_\nu^k}\sum_{s=0}^{m} D_s \mathrm{e}^{-b_\nu[\alpha h + sh + (\gamma/B)h]} =\\
&= \frac{C}{B}\sum_{\gamma=0}^{B-1}\sum_{\nu=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j}\sum_{k=0}^{N_\nu - j}\frac{b_\nu^k}{k!}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial b_\nu^k}\left\{\mathrm{e}^{-b_\nu[\alpha h + (\gamma/B)h]}\sum_{s=0}^{m} D_s \mathrm{e}^{-shb_\nu}\right\}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Postup při určování komplexních čísel $b_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \mu$) v případě přítomnosti šumu je tedy následující: ze soustavy rovnic (30) se určí čísla $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Tato čísla se dosadí do vztahu (18), ze kterého se řešením určí kořeny (19). Těchto kořenů je jen $\mu$ různých, tedy $z_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \mu$). Ze vztahu (16) se pak určí neznámé $b_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \mu$).

K určení neznámých $A_{\nu j}$ v případě přítomnosti šumu je třeba výraz (25) poněkud upravit; především je

$$\xi(\alpha h) = \frac{C}{B} \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{b_\nu^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial b_\nu^k} \mathrm{e}^{-\alpha h b_\nu} \sum_{\gamma=0}^{B-1} \mathrm{e}^{-(\gamma h/B) b_\nu} . \tag{32}$$

Platí ovšem

$$\sum_{\gamma=0}^{B-1} \mathrm{e}^{-(\gamma h/B) b_\nu} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-h b_\nu}}{1 - \mathrm{e}^{-(h/B) b_\nu}} = f(b_\nu) , \tag{33}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial b_\nu^k} f(b_\nu)\, \mathrm{e}^{-\alpha h b_\nu} = \mathrm{e}^{-\alpha h b_\nu} \left( \frac{\partial}{\partial b_\nu} - \alpha h \right)^k f(b_\nu) \tag{34}$$

(vztah (34) je možno dokázat úplnou indukcí), takže potom bude

$$\xi(\alpha h) = \frac{C}{B} \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \mathrm{e}^{-\alpha h b_\nu} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} (-1)^k \frac{b_\nu^k}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial b_\nu} - \alpha h \right)^k f(b_\nu) . \tag{35}$$

Ze soustavy rovnic

$$\xi(\alpha h) = \frac{C}{B} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \mathrm{e}^{-\alpha h b_\nu} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} (-1)^k \frac{b_\nu^k}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial b_\nu} - \alpha h \right)^k f(b_\nu) \right\} ,$$
$$\alpha = 0, 1, 2, \ldots, (m-1) ,$$
$$0 = \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \mathrm{e}^{-\alpha h b_\nu} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} (-1)^k \frac{b_\nu^k}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial b_\nu} - \alpha h \right)^k f(b_\nu) \right\}$$

určíme neznámé $C_{\nu j}$ a pak podle vztahu (8) určíme komplexní čísla $A_{\nu j}$.

Je ovšem možné při určování $A_{\nu j}$ užít rovněž metody nejmenších čtverců, tj. zvolit si na ose času libovolnou posloupnost

$$t_1, t_2, \ldots, t_M , \quad M > m ,$$

které přísluší posloupnost funkčních hodnot

$$\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_M) ,$$

a požadovat, aby funkce

$$F(\operatorname{Re} A_{\nu j}, \operatorname{Im} A_{\nu j}) = \sum_{\beta=1}^{M} \delta^2(t_\beta)$$

měla minimum. Touto variantou se zde nebudeme zabývat.

Na závěr této části poznamenáváme, že místo středních hodnot $\hat{\xi}(\alpha h)$ daných výrazem (25) je možno při určování komplexních čísel $b_\nu$ použit integrálů

$$\hat{\xi}(\alpha h) = \int_{\alpha h}^{h+\alpha h} \xi(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, (2m-1)\,,$$

jejichž hodnoty určíme planimetrováním.

## URČENÍ ŘÁDU VYŠETŘOVANÉ SOUSTAVY

V tom případě, kdy je znám řád analyzované soustavy, platí soustava rovnic (20) resp. (30), tudíž také vztah (18). Určíme-li ze soustavy rovnic (20) neznámé $D_1, D_2, \ldots, \ldots, D_m$ a dosadíme-li je do kterékoliv následující rovnice, platí

$$(36) \quad \bar{x}(\alpha h + mh + \varrho h) + \sum_{s=1}^{m} D_s \bar{x}(\alpha h + mh + sh + \varrho h) = 0\,, \quad \varrho = 0, 1, 2, \ldots,$$

nebo v případě soustavy rovnic (30)

$$(37) \quad \hat{\xi}(\alpha h + mh + \varrho h) + \sum_{s=1}^{m} D_s \hat{\xi}(\alpha h + mh + sh + \varrho h) = 0\,, \quad \varrho = 0, 1, 2, \ldots$$

Platnost vztahu (36) resp. (37) plyne z platnosti vztahu (18); skutečně, je např.

$$\bar{x}(\alpha h + mh + \varrho h) + \sum_{s=1}^{m} D_s \bar{x}(\alpha h + mh + sh + \varrho h) =$$

$$= C \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} e^{-b_\nu(\alpha h + mh + \varrho h)} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{(\alpha h + mh + \varrho h)^k}{k!} b_\nu^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{m} D_s \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} e^{-b_\nu(\alpha h + mh + sh + \varrho h)} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{(\alpha h + mh + \varrho h + sh)^k}{k!} b_\nu^k \right\} =$$

$$= C \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_\nu} C_{\nu j} \sum_{k=0}^{N_\nu - j} \frac{b_\nu^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial b_\nu^k} e^{-b_\nu(\alpha h + mh + \varrho h)} \left[ 1 + \sum_{s=1}^{m} D_s e^{-shb_\nu} \right] \right\}.$$

Ovšem výraz v hranaté závorce v posledním vztahu není nic jiného než výraz (18). Podobně se dokáže i vztah (37).

Skutečnosti, že platí vztah (36), resp. (37), využijeme k určení řádu analyzované lineární soustavy. Při řešení soustavy lineárních rovnic (20) resp. (30) dostaneme hodnoty neznámých $D_1, D_2, \ldots, D_m$ s chybami, takže, když tato řešení dosadíme zpět do soustavy rovnic (20) resp. (30), nedostaneme na pravé straně nulu, ale určitou množinu čísel blízkých nule. Z toho ovšem plyne, že totéž nastane, když čísla $D_1, D_2, \ldots, D_m$ dosadíme do výrazu (36) v případě soustavy rovnic (20), resp. do výrazu (37) v případě soustavy rovnic (30) — to znamená, že nedostaneme přesně nulu, ale určité číslo, které je blízké nule. Bude tedy ve skutečnosti 

$$(38)\quad \bar{x}(\alpha h + mh + \varrho h) + \sum_{s=1}^{m} D_s \bar{x}(\alpha h + mh + sh + \varrho h) = \hat{r}_m\,, \quad \varrho = 0, 1, 2, \ldots$$

po případě při řešení soustavy lineárních rovnic (30) bude

$$(39)\quad \hat{\xi}(\alpha h + mh + \varrho h) + \sum_{s=1}^{m} D_s \hat{\xi}(\alpha h + mh + sh + \varrho h) = r_m\,, \quad \varrho = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Právě to $m$, pro něž bude

$$(40)\qquad \min |r_m|\,, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

po případě

$$(41)\qquad \min |\hat{r}_m|\,, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

budeme považovat za řád analyzované soustavy. Toto číslo $m$ nemusí být přesný řád vyšetřované soustavy; jde prostě o prakticky nejúčelnější řád, který dává aproximační matematický model.

Na závěr je třeba upozornit na jednu závažnou skutečnost; při řešení soustavy rovnic (20) resp. (30) nějakou iterační metodou obyčejně vznikají potíže numerického charakteru – konvergence k správnému řešení může být velmi pomalá. Příčina spočívá v jedné zvláštnosti, která je charakteristická pro soustavy rovnic typu (20) nebo (30). Označme symbolem $a_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) vektor, jehož komponenty jsou prvky $j$-tého řádku matice soustavy rovnic (20) nebo (30). Úhel mezi libovolnými dvěma takto definovanými vektory může být velmi malý, což má za následek špatnou řešitelnost takových soustav iteračními metodami. (Kosinus úhlu mezi dvěma vektory zde chápeme jako poměr skalárního součinu těchto dvou vektorů k součinu jejich norem.)

Tuto potíž, tj. že vektory mohou být skoro kolineární, je možno odstranit tím, že se daná matice soustavy (20) nebo (30) ortogonalizuje.

Je třeba také podotknout, že v rovnicích (20) a (30) je nutno položit $\alpha = 0$, jinak obecně můžeme ztratit informaci o charakteru přechodové charakteristiky v okolí počátku.

(Došlo dne 10. března 1964.)

LITERATURA

[1] Smirnov V. I.: Kurs vyssej matematiki, Tom III, časť 1. Moskva 1956.
[2] Vidinčev P.: Identifikace lineárních spojitých soustav. Automatizace (1963), č. 7.

# Investigation of Linear Systems with Lumped Parameters

Pane Vidinčev

Essential presupposition of the control systems synthesis is the knowledge of dynamic properties of the controlled plant. They are these properties, which are taken into consideration when computing the transfer function of the correcting element to fulfil the chosen criterion depending upon the plant.

This paper deals with the determination of dynamic properties of linear systems with constant lumped parameters. The dynamic properties can be fully described by the transfer function (1). The problem consists in determining the numbers (generally complex) $b_\nu$ and $A_{\nu j}$ and the order (3), provided some characteristic of the investigated plant is given. For the purposes of this paper the step response of the investigated plant is supposed to be known and is used for the computing of original controlled plant transfer function (1). The method given takes also into consideration the noise, which distorts the controlled plant output signal.

*Inž. Pane Vidinčev, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.*